

13 - पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं आयतन

उदाहरण-1 रशीद को जन्मदिन के तोहफे के रूप में एक लट्ठू मिला, जिस पर रंग नहीं किया गया था। वह इस पर अपने मौमिया रंगों से रंग करना चाहता है। यह लट्ठू एक शंकु के आकार का है जिसके ऊपर एक अर्ध गोला अध्यारोपित है। लट्ठू की पूरी ऊँचाई 5 cm है और इसका व्यास 3.5 cm है। उसके द्वारा रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\text{व्यास} = 3.5 \text{ cm}$$

$$\text{त्रिज्या} = \frac{3.5}{2}$$

$$\text{त्रिज्या} = \frac{3.5}{2} = 1.75 \text{ cm}$$

$$\text{त्रिज्या} = 1.75$$

$$h = 5 - 1.75$$

$$h = 3.25 \text{ cm}$$

$$L^2 = h^2 + r^2$$

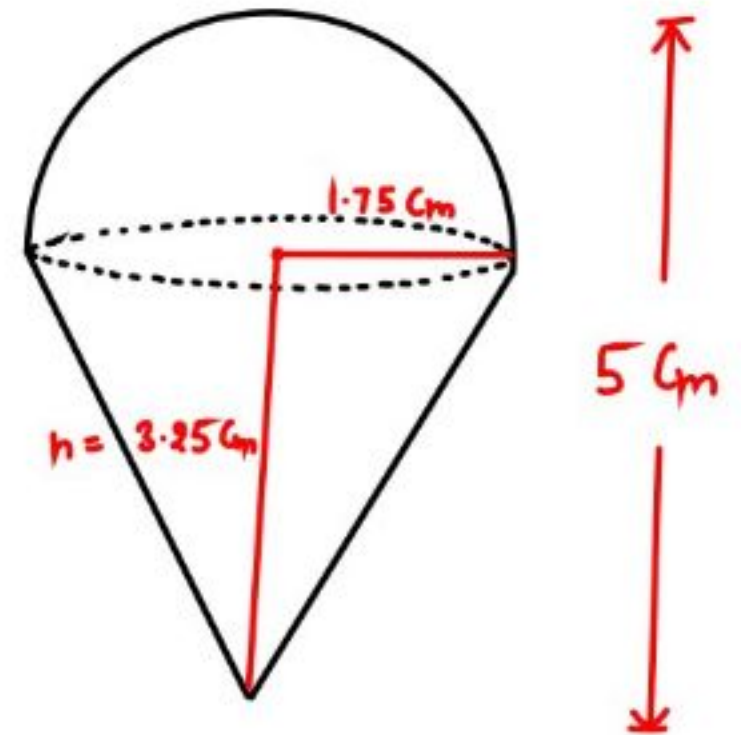
$$L^2 = (3.25)^2 + (1.75)^2$$

$$L^2 = 10.5625 + 3.0625$$

$$L^2 = 13.625$$

$$L = \sqrt{13.625}$$

$$L \approx 3.7 \text{ cm}$$



$$\text{रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल} = \text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्ध गोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल}$$

$$= \pi r L + 2\pi r^2$$

$$= \pi r (L + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{35}{20} \times (3.7 + 2(1.75))$$

$$= \frac{55}{10} (3.7 + 3.5)$$

$$= 5.5 \times 7.2 = 39.6 \text{ cm}^2$$

उदाहरण-2 आकृति में दर्शाया गया सजावट के लिए प्रयोग होने वाला ब्लॉक दो ठोसों से मिलकर बना है। इनमें से एक घन है और दूसरा अर्धगोला है। इस ब्लॉक का आधार 5 cm कोर या किनारे वाला घन है और उसके ऊपर लगे हुए अर्धगोले का व्यास 4.2 cm है। इस ब्लॉक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$a = 5 \text{ cm}$$

$$r = \frac{4.2}{2} = 2.1 \text{ cm}$$

ब्लॉक का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल - वृत्त का क्षेत्रफल + अर्धगोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$= 6a^2 + \pi r^2$$

$$= 6(5)^2 + \frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1$$

$$= (6 \times 25) + \frac{22}{7} \times \frac{21}{10} \times 2.1$$

$$= 150 + \frac{(66 \times 2.1)}{10}$$

$$= 150 + 6.6 \times 2.1$$

$$= 150 + 13.86$$

$$= 163.86 \text{ cm}^2$$

उदाहरण-3 लकड़ी का एक खिलौना रॉकेट एक शंकु के आकार का है जो बेलन पर अध्यारोपित है। सम्पूर्ण रॉकेट की ऊँचाई 26 cm है, जबकि शंकुवाकार भाग की ऊँचाई 6 cm है। शंकुवाकार भाग के आधार का व्यास 5 cm और बेलनाकार भाग के आधार का व्यास 3 cm है। यदि शंकुवाकार भाग पर नारंगी रंग किया जाना है और बेलनाकार भाग पर पीला रंग किया जाना है, तो प्रत्येक रंग द्वारा रॉकेट पर रंगे जाने वाले भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$)

हल:-

शाना शंकु के आधार की त्रिज्या r_1 है
और बेलन के आधार की त्रिज्या r_2 है

$$r_1 = \frac{5}{2} \text{ cm} \text{ एवं } r_2 = \frac{3}{2} \text{ cm}$$

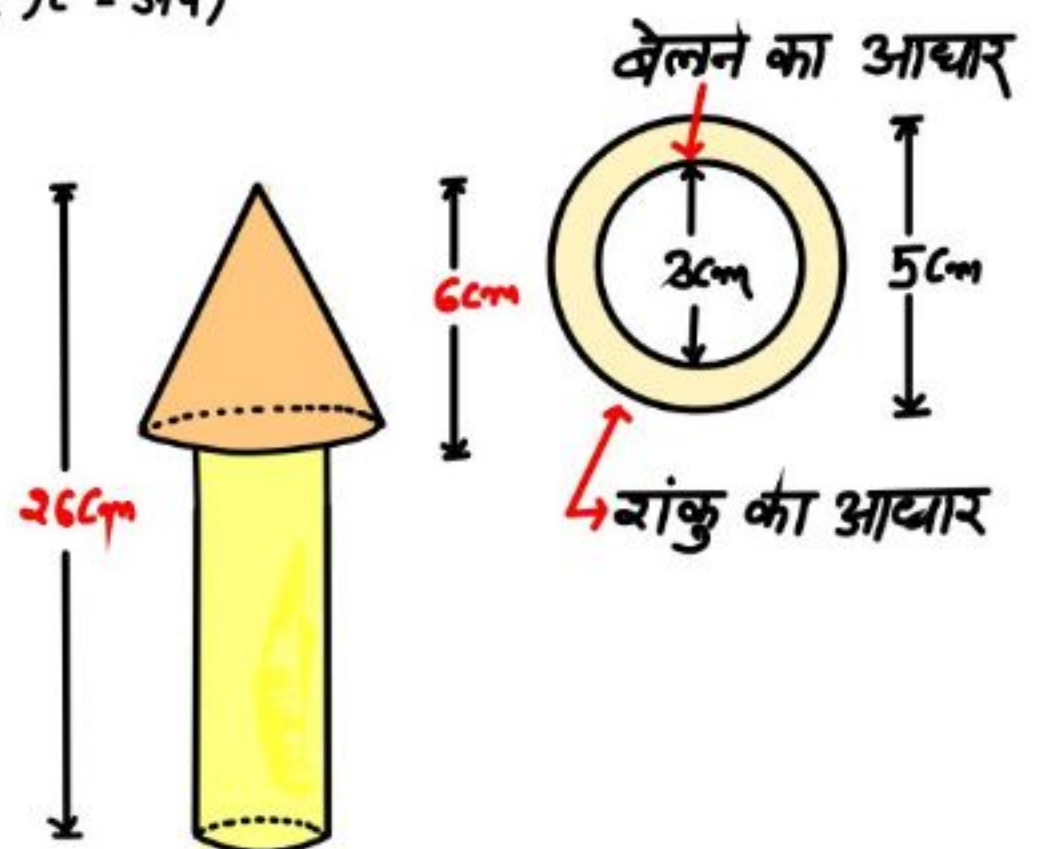
$$r_1 = 2.5 \text{ cm}, \quad r_2 = 1.5 \text{ cm}$$

$$h^2 + r_1^2 = l^2$$

$$\Rightarrow 6^2 + (2.5)^2 = l^2$$

$$\Rightarrow 36 + 6.25 = l^2$$

$$\Rightarrow h^2 + r_2^2 = l^2$$



$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 6^2 + (2.5)^2 &= L^2 \\
 \Rightarrow 36 + 6.25 &= L^2 \\
 \Rightarrow 42.25 &= L^2 \\
 \Rightarrow L &= \sqrt{42.25} \\
 \Rightarrow L &= 6.5 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

नारंगी रंग किया जाने वाला क्षेत्रफल = शंकु के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल + πr_1^2 - πr_2^2

$$\begin{aligned}
 &= \pi r L + \pi r_1^2 - \pi r_2^2 \\
 &= \pi (r L + r_1^2 - r_2^2) \\
 &= \pi [(2.5)(6.5) + (2.5)^2 - (1.5)^2] \\
 &= 3.14 [16.25 + 6.25 - 2.25] \\
 &= 3.14 \times 20.25 \\
 &= 63.585 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

पीले रंग वाला क्षेत्रफल = बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + चतुर्भुज का क्षेत्रफल

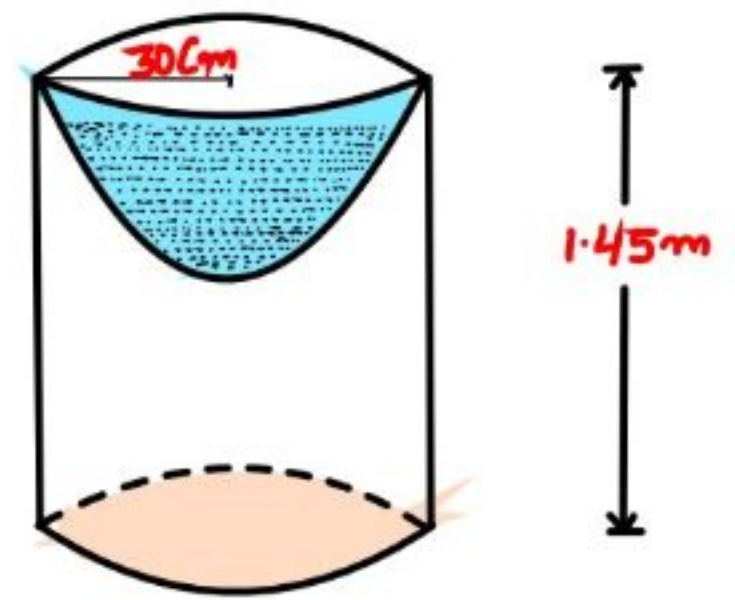
$$\begin{aligned}
 &= 2\pi r h + \pi r^2 \\
 &= \pi r [2h + r] \\
 &= 3.14 \times 1.5 \times [2 \times 20 + 1.5] \\
 &= 3.14 \times 1.5 \times [40 + 1.5] \\
 &= 3.14 \times 1.5 \times 41.5 \\
 &= 195.465 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

उदाहरण-4 मयंक ने अपने बगीचे के लिए एक पक्षी स्नानागार बनाया जिसका आधार एक खोखले बेलन जैसा है जिसके एक सिरे पर अर्ध गोलाकार वर्तन रखा हुआ है बेलन की ऊँचाई 1.45m है और उसकी त्रिज्या 30 cm है। इसे पक्षी स्नानागार का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:- पक्षी स्नानागार का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \begin{array}{l} \text{बेलन का वक्र} \\ \text{पृष्ठीय क्षेत्रफल} \end{array} + \begin{array}{l} \text{अर्ध गोला का वक्र} \\ \text{पृष्ठीय क्षेत्रफल} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi eh + 2\pi e^2 \\
 &= 2\pi e (h+e) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times (145+30) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 30 \times 175 \\
 &= 50 \times 22 \times 30 \\
 &= 1500 \times 22 \\
 &= \boxed{33000 \text{ cm}^2}
 \end{aligned}$$



प्रश्नावली 18।

प्रश्न-1 दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक घेस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

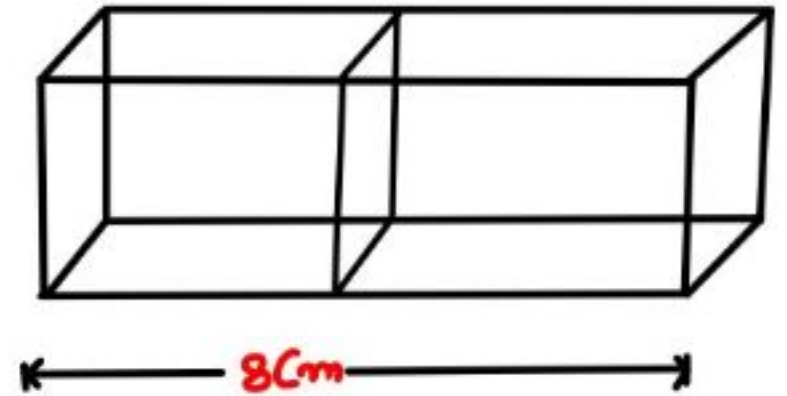
हल:-

$$\text{घन का आयतन} = a^3$$

$$\Rightarrow 64 = a^3$$

$$\Rightarrow (64)^{1/3} = a$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ cm}$$



$$\begin{aligned} \text{घनाभ} \rightarrow l &= 8 \text{ cm} \\ b &= 4 \text{ cm} \\ h &= 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2(lb + bh + lh)$$

$$= 2[8(4) + 4(4) + 8(4)]$$

$$= 2(32 + 16 + 32)$$

$$= 2(80)$$

$$= 160 \text{ cm}^2$$

प्रश्न-2 कोई वर्तन एक खोखले अर्द्धगोले के आकार का है जिसके ऊपर एक खोखला बेलन अधारोपित है। अर्द्ध गोले का व्यास 14 cm है और इस वर्तन की कुल ऊँचाई 13 cm है। इस वर्तन का आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\text{आन्तरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल}$$

$$= \text{बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्द्ध गोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल}$$

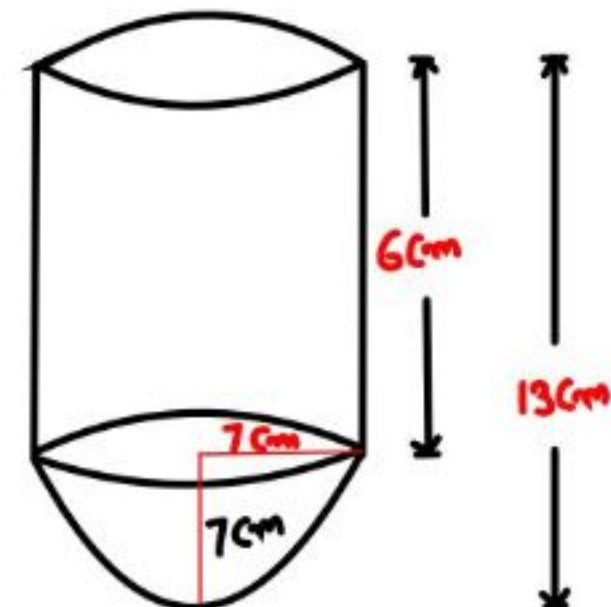
$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r (h + r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (6 + 7)$$

$$= 44 \times 13$$

$$= 572 \text{ cm}^2$$



प्रश्न-3 एक खिलौना त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आकार का है जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्ध गोल पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण ऊँचाई 15.5 cm है। इसे खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल:-

$$\Rightarrow r = 3.5 \text{ cm}, h = 12 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow r^2 + h^2 = L^2$$

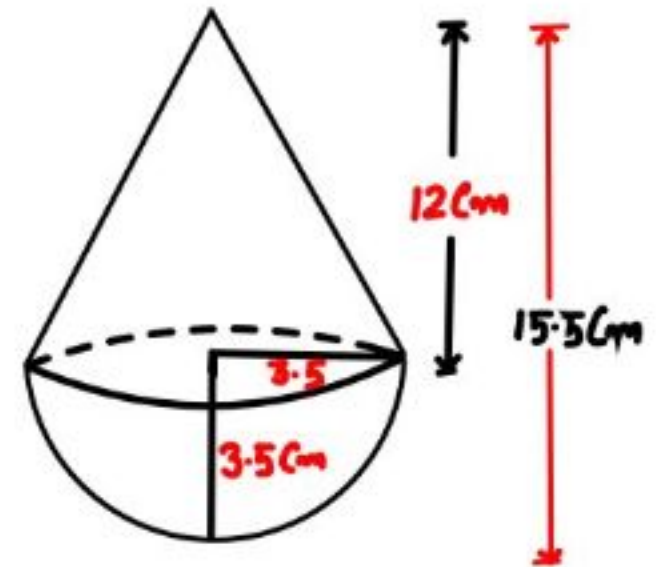
$$\Rightarrow (3.5)^2 + (12)^2 = L^2$$

$$\Rightarrow 12.25 + 144 = L^2$$

$$\Rightarrow 156.25 = L^2$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{156.25}$$

$$L = 12.5$$



सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्ध गोल का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r L + 2\pi r^2$$

$$= \pi r (L + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 \times (12.5 + 7)$$

$$= \frac{110}{10} \times 19.5$$

$$= 214.5 \text{ cm}^2$$

प्रश्न-4 भुजा 7 cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के ऊपर एक अर्ध गोल रखा हुआ है। अर्ध गोल का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\text{व्यास} = 7 \text{ cm}$$

$$r = \frac{7}{2} \text{ cm}, a = 7 \text{ cm}$$

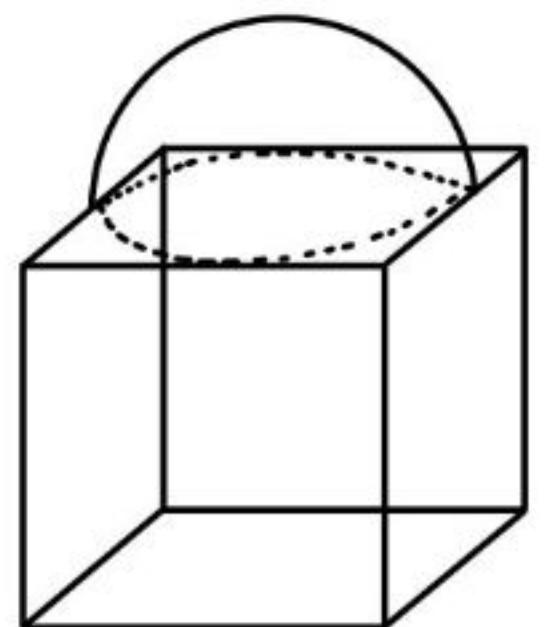
$$\text{अर्ध गोल का अधिकतम व्यास} = 7 \text{ cm}$$

पृष्ठीय क्षेत्रफल = घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल - वृत्त का क्षेत्रफल + अर्ध गोल का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$= 6a^2 + \pi r^2$$

$$= 6(7)^2 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$



$$\begin{aligned}
 &= 6(49) + \frac{77}{2} \\
 &= 294 + 38.5 \\
 &= \boxed{332.5 \text{ cm}^2}
 \end{aligned}$$

प्रश्न-5 एक घनाकार ब्लॉक के एक फलक को अन्दर की ओर से काटकर एक अर्द्ध गोलाकार गड्ढा इस प्रकार बनाया गया है कि अर्द्धगोले का व्यास घन के एक किनारे के बराबर है। शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
हल:-

$$\begin{aligned}
 \text{माना घन की कोर (भुजा)} &= a \text{ cm} \\
 \text{एवं घन की त्रिज्या} &= \frac{a}{2} \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\text{ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल} =$$

$$= \text{घन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} - \text{चूँच का पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्द्ध गोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल}$$

$$= 6a^2 - \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

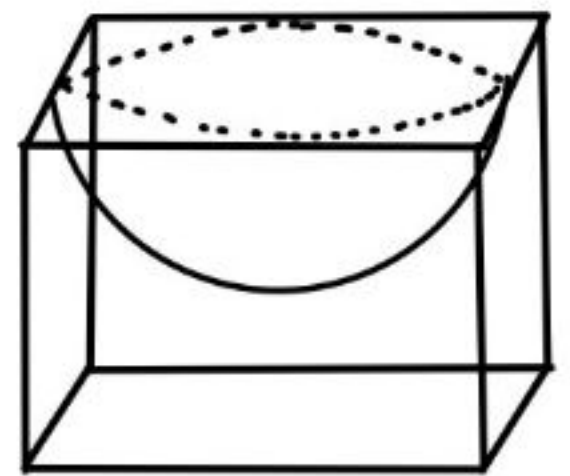
$$= 6a^2 + \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= 6a^2 + \pi \left(\frac{a^2}{4}\right)$$

$$= 6a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$$

$$= a^2 \left(\frac{6}{1} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= a^2 \left(\frac{24 + \pi}{4} \right) \text{ cm}^2$$



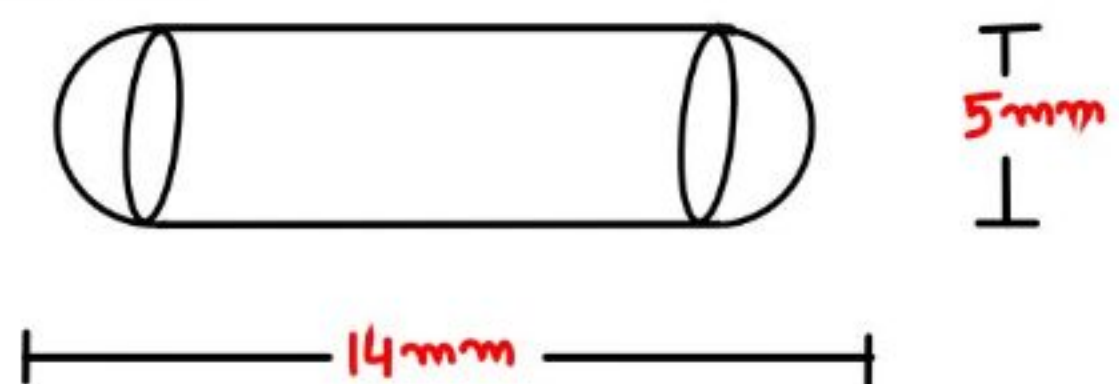
प्रश्न-6 दवा का एक कैप्सूल एक बेलन के आकार का है जिसके दोनों सिरों पर एक-एक अर्द्धगोला लगा हुआ है। पूरे कैप्सूल की लम्बाई 14 mm है और उनके व्यास 5 mm हैं। इसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
हल:-

$$\text{व्यास} = 5 \text{ mm}$$

$$r = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ mm}$$

$$\text{ऊँचाई} = 14 - 2.5 - 2.5$$

$$h = 9 \text{ mm}$$



$$\begin{aligned}
 \text{पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= \text{बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्ध गोल का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्ध गोल का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\
 &= 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r^2 \\
 &= 2\pi rh + 4\pi r^2 \\
 &= 2\pi r (h + 2r) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5 \times (9 + 2(2.5)) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5 \times (9 + 5) \\
 &= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.5 \times 14 \\
 &= \boxed{220 \text{ m}^2}
 \end{aligned}$$

प्रश्न-7 कोई तम्बू एक बेलन के आधार का है जिस पर एक शंकु अट्टयारोपित है। यदि बेलनाकार भाग की ऊँचाई और व्यास क्रमशः 2.1 मीटर और 4 मीटर हैं तथा शंकु की तिर्यक ऊँचाई 2.8 मीटर है तो इस तम्बू को बनाने में प्रयुक्त कैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही ₹ 500 प्रति m^2 की दर से इसमें प्रयुक्त कैनवास की लागत ज्ञात कीजिए। ध्यान दीजिए कि तम्बू के आधार को कैनवास से नहीं ढका जाता है।

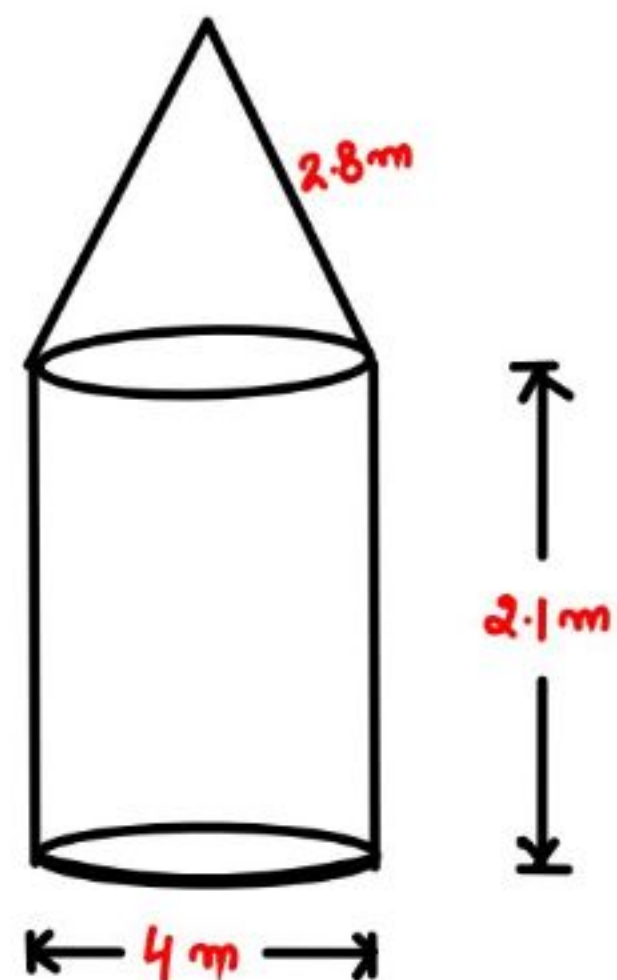
हल:- $r = \frac{4}{2} = 2 \text{ m}$

$h = 2.1 \text{ m}$

$l = 2.8 \text{ m}$

कैनवास का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \text{बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} \\
 &= 2\pi rh + \pi rl \\
 &= \pi r (2h + l) \\
 &= \frac{22}{7} \times 2 \times (2(2.1) + 2.8) \\
 &= \frac{22}{7} \times 2 \times (4.2 + 2.8) \\
 &= \frac{22}{7} \times 2 \times 7 \\
 &= 44 \text{ m}^2
 \end{aligned}$$



कैनवास को बनाने में लगी कुल लागत

$$= 44 \times 500 = \text{₹ } 22000$$

प्रश्न-8 ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस बेलन में से इसी ऊँचाई और व्यास वाला एक शीर्षाकार खोल काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेमी. तक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$r = \frac{1.4}{2} = 0.7 \text{ cm}$$

$$h = 2.4 \text{ cm}$$

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$l^2 = (0.7)^2 + (2.4)^2$$

$$l^2 = 0.49 + 5.76$$

$$l^2 = 6.25$$

$$l = \sqrt{6.25}$$

$$= 2.5 \text{ cm}$$

शेष बचे ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \text{बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$= 2\pi rh + \pi rl + \pi r^2$$

$$= \pi r (2h + l + r)$$

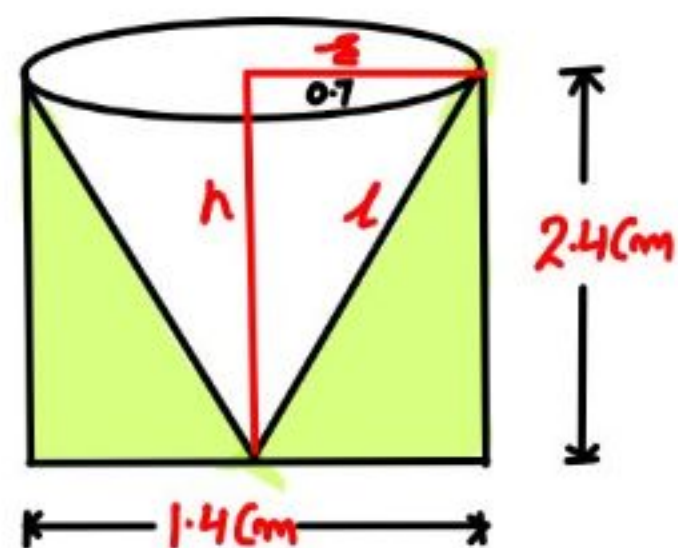
$$= \frac{22}{7} \times \frac{1.4}{2} \times (2(2.4) + 2.5 + 0.7)$$

$$= \frac{22}{10} \times (4.8 + 2.5 + 0.7)$$

$$= \frac{22}{10} \times 8$$

$$= \frac{176}{10} = 17.6 \text{ cm}^2$$

$$\approx 18 \text{ cm}^2$$



प्रश्न-9 लकड़ी के एक ठोस बेलन के प्रत्येक सिरे पर एक अर्द्धगोला खोदकर निकालते हुए एक वस्तु बनाई गई है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 cm और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है तो इस वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल -

वस्तु का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \text{बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्ध गोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{अर्ध गोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल}$$

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi rh + 4\pi r^2$$

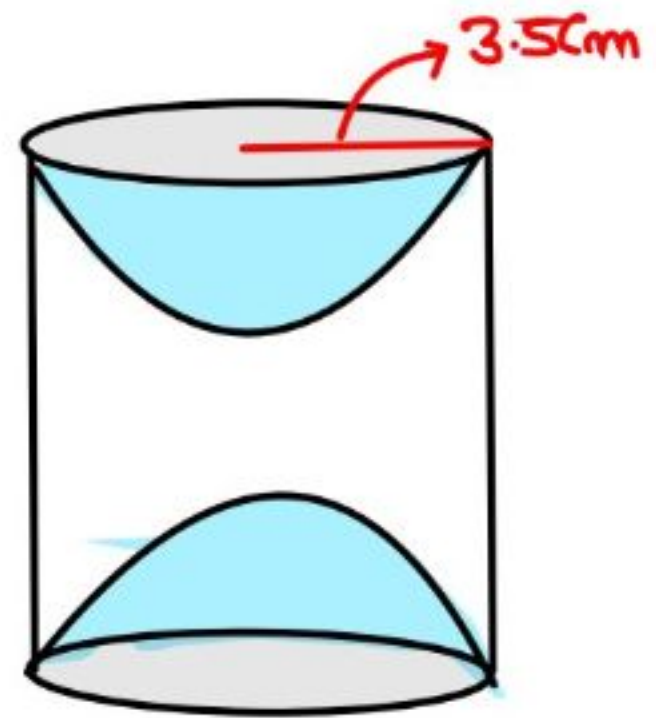
$$= 2\pi r (h + 2r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times (10 + 2(3.5))$$

$$= 22 \times (10 + 7)$$

$$= 22 \times 17$$

$$= \boxed{374 \text{ cm}^2}$$

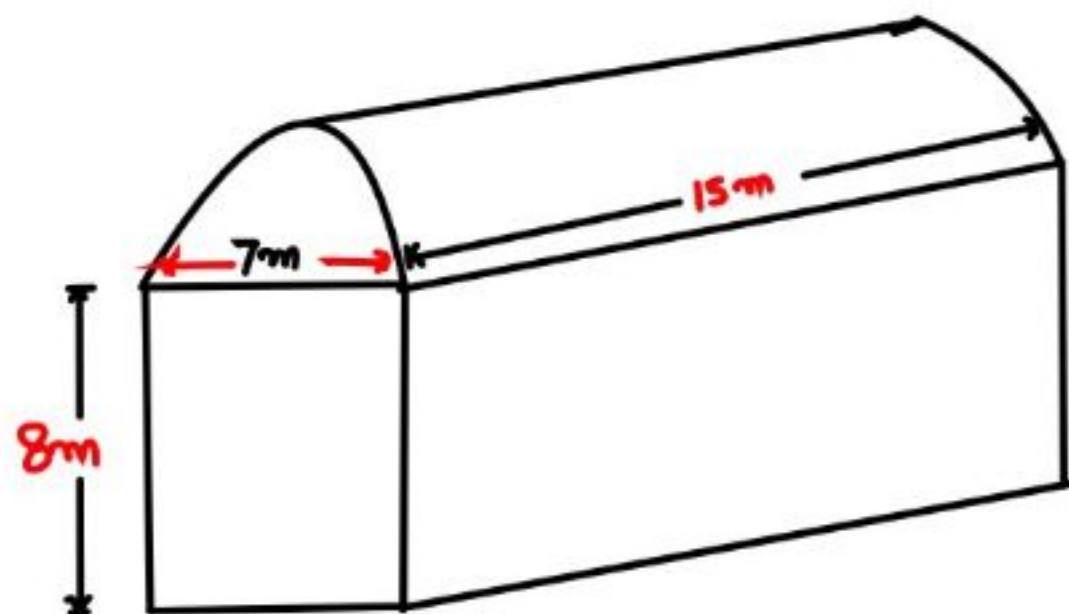


उदाहरण-5 शांता किसी रोड़ में एक उद्योग चलाती हैं। यह रोड़ एक घनाभ के आकार का है जिस पर एक अर्द्धवेलन आरोपित है। यदि इस रोड़ के आधार की विमाएँ $7\text{m} \times 15\text{m}$ हैं तथा घनाभकार भाग की ऊँचाई 8m है तो रोड़ में समावेशित हो सकने वाली हवा का आयतन ज्ञात कीजिए। पुनः यदि यह मान लें कि रोड़ में रखी मशीनरी 300m^3 स्थान घेरती है तथा रोड़ के अन्दर 20 श्रमिक हैं जिनमें से प्रत्येक 0.08m^3 के औसत से स्थान घेरता है तब रोड़ में कितनी हवा होगी।

हल:-

$$\begin{aligned} L &= 7\text{m} \\ b &= 15\text{m} \\ h &= 8\text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= 15\text{m} \\ r &= \frac{7}{2}\text{m} \end{aligned}$$



हवा का आयतन

$$= \text{घनाभ का आयतन} + \text{अर्द्धवेलन का आयतन}$$

$$= (L \times b \times h) + \frac{1}{2} (\pi r^2 H)$$

$$= (7 \times 15 \times 8) + \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 15$$

$$= 840 + \frac{11 \times 7 \times 15}{4}$$

$$= 840 + 288.75$$

$$= 1128.75 \text{ m}^3$$

$$\text{रोड़ में हवा का आयतन} = 1128.75 - \text{मशीनरी का आयतन} - 20 \text{ श्रमिकों का आयतन}$$

$$= 1128.75 - 300 - (20 \times 0.08)$$

$$= 1128.75 - 300 - 1.6$$

$$= 827.15 \text{ m}^3$$

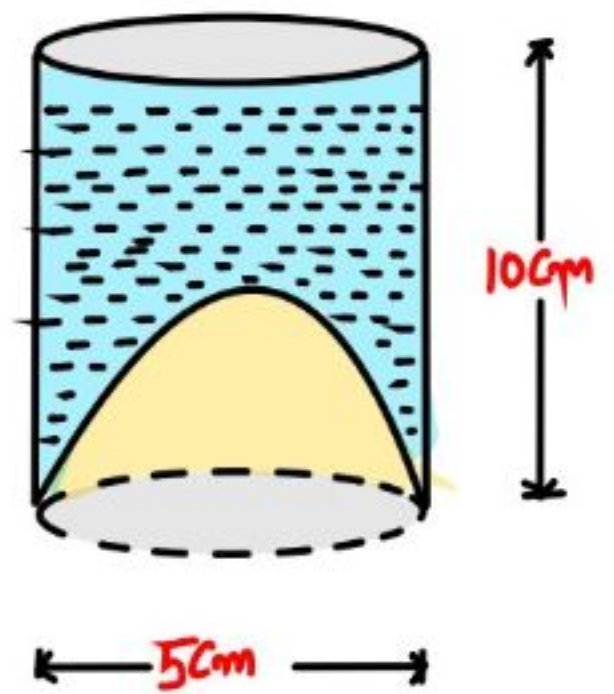
उदाहरण-6 एक जूस बेचने वाला अपने ग्राहकों को आकृति में दर्शाए गिलासों से जूस देता था। बेलनाकार गिलास का आन्तरिक व्यास 5cm था, परन्तु गिलास के निचले स्तर में एक उभरा हुआ अर्द्धगोला था, जिससे गिलास की धारिता कम हो जाती थी। यदि एक गिलास की ऊँचाई 10cm थी, तो गिलास की आभासी धारिता तथा उसकी वास्तविक धारिता ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल -

$$\begin{aligned}\text{आभासी धारिता} &= \text{बेलन का आयतन} \\ &= \pi r^2 h \\ &= 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 10 \\ &= 196.25 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\text{वास्तविक धारिता} = \text{आभासी धारिता} - \text{अर्द्धगोले का आयतन}$$

$$\begin{aligned}&= 196.25 - \frac{2}{3} \pi r^3 \\ &= 196.25 - \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5 \times 2.5 \\ &= 196.25 - 32.71 \\ &= 163.54 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

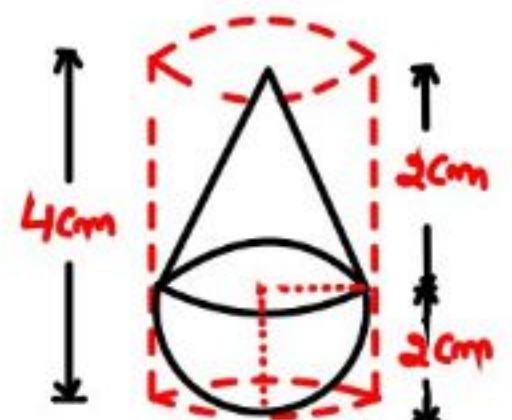
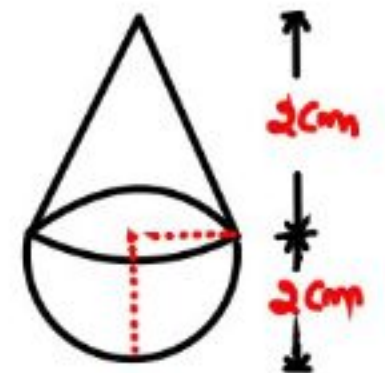


उदाहरण-7 एक ठोस खिलौना एक अर्द्धगोले के आकार का है जिस पर एक लम्बवृत्तीय शंकु आरोपित है। इस शंकु की ऊँचाई 2cm है और आधार का व्यास 4cm है। इस खिलौने का आयतन निर्धारित कीजिए। यदि एक लम्ब वृत्तीय बेलन इस खिलौने के परिमित हो तो बेलन और खिलौने के आयतनों का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल -

$$\text{खिलौने का आयतन} = \text{शंकु का आयतन} + \text{अर्द्धगोले का आयतन}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{1}{3} \times 3.14 \times 2^2 \times 2 + \frac{2}{3} \times 3.14 \times 2^3 \\ &= \frac{3.14 \times 8}{3} + \frac{2 \times 3.14 \times 8}{3} \\ &= \frac{3.14 \times 8}{3} (1 + 2) \\ &= \frac{3.14 \times 8}{3} \times 3 = 25.12 \text{ cm}^3\end{aligned}$$



$$\text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$\begin{aligned}&= 3.14 \times 2^2 \times 4 \\ &= 50.24 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{आयतनों का अन्तर} &= 50.24 - 25.12 \\ &= 25.12 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

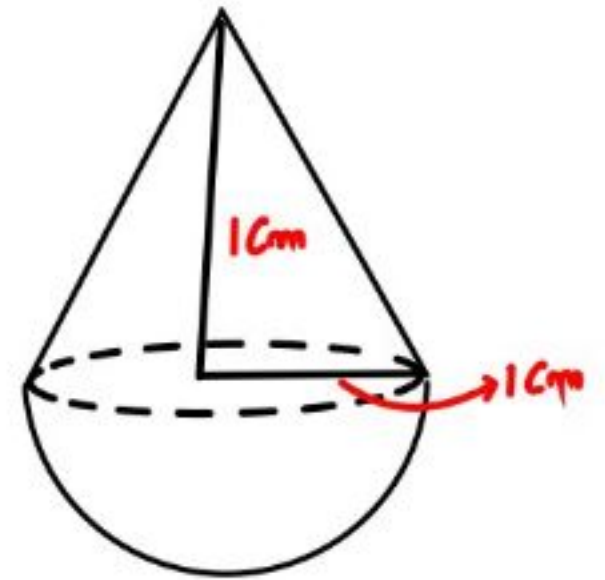
प्रश्नावली 13.2

प्रश्न-1 एक ठोस एक अर्ध गोल के पर खड़े एक शंकु के आकार का है जिनकी त्रिज्याएँ 1cm हैं तथा शंकु की ऊँचाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस ठोस का आयतन π के पदों में ज्ञात कीजिए।

हल:-

ठोस का आयतन = शंकु का आयतन + अर्धगोले का आयतन

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 \\
 &= \frac{1}{3} \pi r^2 (h + 2r) \\
 &= \frac{1}{3} \times \pi \times 1^2 \times (1 + 2) \\
 &= \frac{1}{3} \times \pi \times 3 \\
 &= \boxed{\pi \text{ cm}^3}
 \end{aligned}$$



प्रश्न-2 एक इंजीनियरिंग के विद्यार्थी रचेल से एक पतली एल्युमीनियम की शीट का प्रयोग करते हुए एक मॉडल बनाने को कहा गया जो एक ऐसे बेलन के आकार का हो जिसके दोनों सिरों पर दो शंकु जुड़े हुए हों। इस मॉडल का व्यास 3cm है और इसकी लम्बाई 12cm है। यदि प्रत्येक शंकु की ऊँचाई 2cm हो तो रचेल द्वारा बनाए गए मॉडल में अंतर्विष्ट हवा का आयतन ज्ञात कीजिए (यह मान लीजिए कि मॉडल की आन्तरिक और बाहरी विमाएँ लगभग बराबर हैं।)

हल:-

$$r = \frac{3}{2} = 1.5\text{cm}$$

माना शंकु की ऊँचाई $h\text{cm}$ तथा

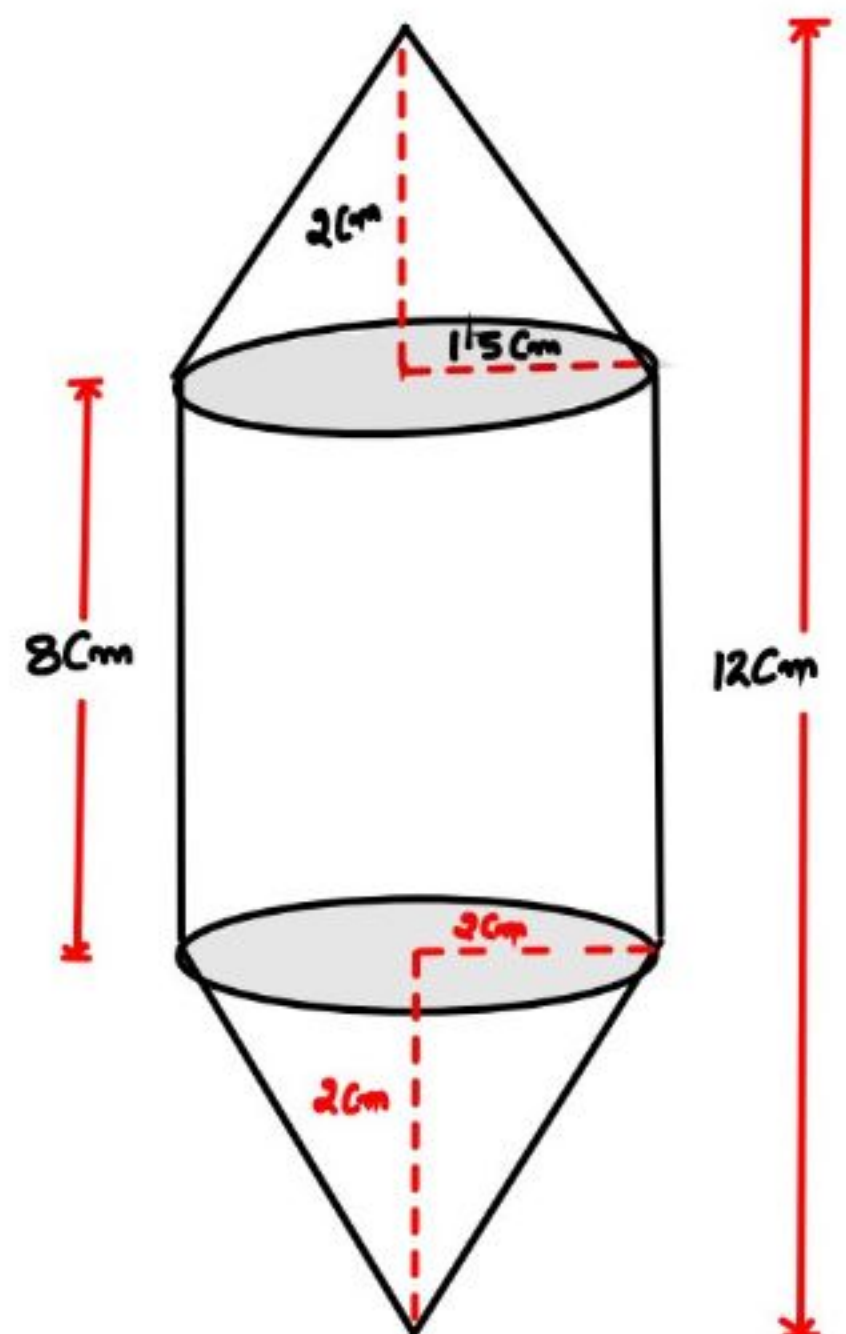
बेलन की ऊँचाई $H\text{cm}$ है।

$$\boxed{h = 2\text{cm}}, \quad \boxed{H = 8\text{cm}}$$

मॉडल का आयतन

= बेलन का आयतन + 2(शंकु का आयतन)

$$\begin{aligned}
 &= \pi r^2 H + 2 \cdot \frac{1}{3} \pi r^2 h \\
 &= \pi r^2 \left(H + \frac{2}{3} h \right) \\
 &= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times \left(8 + \frac{2}{3} (2) \right)
 \end{aligned}$$



$$= \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times \left(\frac{24+4}{3}\right)$$

$$= \frac{11}{7} \times 1.5 \times 28$$

$$= \boxed{66 \text{ cm}^3}$$

प्रश्न-3 एक गुलाब जामुन में उसके आयतन की लगभग 30% चीनी की-पाशनी होती है। 45 गुलाब जामुनों में लगभग कितनी चीशनी होगी, यदि प्रत्येक गुलाब जामुन एक बेलन के आकार का है, जिसके दोनों सिरे अर्द्ध गोलाकार हैं तथा इसकी लम्बाई 5 cm और व्यास 2.8 cm है।

हल -

$$r = \frac{2.8}{2} = 1.4 \text{ cm}$$

$$h = 5 - 1.4 = 2.2 \text{ cm}$$

गुलाब जामुन का आयतन

$$= \text{बेलन का आयतन} + 2 \left(\text{अर्द्ध गोले का आयतन} \right)$$

$$= \pi r^2 h + 2 \left(\frac{2}{3} \pi r^3 \right)$$

$$= \pi r^2 \left(h + \frac{4}{3} r \right)$$

$$= \frac{22}{7} \times 1.4 \times 1.4 \times \left(\frac{2.2}{1} + \frac{4}{3} (1.4) \right)$$

$$= \frac{44}{10} \times 1.4 \times \left(\frac{6.6+5.6}{3} \right)$$

$$= \frac{4.4 \times 1.4 \times 12.2}{3} = \boxed{\frac{75.152}{3} \text{ cm}^3}$$

चीशनी की मात्रा = 1 गुलाब जामुन के आयतन का 30%

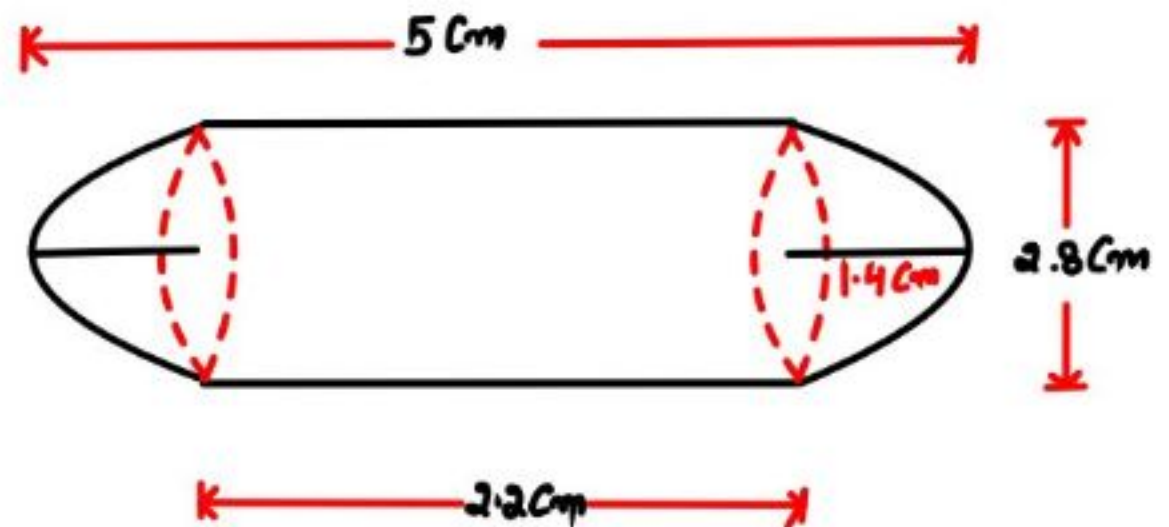
$$= \frac{75.152}{3} \times \frac{30}{100}$$

$$= \boxed{7.5152 \text{ cm}^3}$$

$$\text{कुल चीशनी की मात्रा} = 7.5152 \times 45$$

$$= 338.184 \text{ cm}^3$$

$$\approx \boxed{338 \text{ cm}^3}$$



प्रश्न-4 एक कलमदान घनाभ के आकार की लकड़ी से बना है जिसमें कलम रखने के लिए चार बांबूकार गड्ढे बने हुए हैं। घनाभ की विमाएँ $15\text{cm} \times 10\text{cm} \times 3.5\text{cm}$ हैं। प्रत्येक गड्ढे की त्रिज्या 0.5cm है और गहराई 1.4cm है। पूरे कलमदान में लकड़ी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$L = 15\text{cm}, b = 10\text{cm}, H = 3.5\text{cm}$$

कलमदान में लकड़ी का आयतन

$$= \text{घनाभ का आयतन} - 4 \times \text{बांबू का आयतन}$$

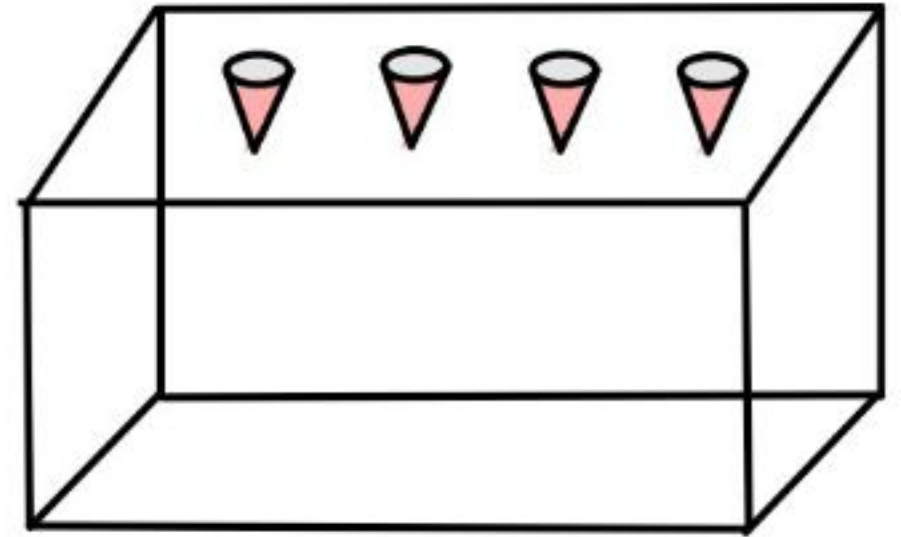
$$= L \times b \times H - 4 \times \frac{4}{3} \pi r^2 h$$

$$= 15 \times 10 \times 3.5 - \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4$$

$$= 15 \times 35 - \frac{4 \times 22 \times 0.5 \times 0.5 \times 1.4}{3}$$

$$= 525 - 1.46$$

$$= 523.53\text{cm}^3$$



प्रश्न-5 एक वर्तन एक उल्टे शंकु के आकार का है। इसकी ऊँचाई 8cm है और इसके ऊपरी सिरे (जो खुला हुआ है) की त्रिज्या 5cm है यह ऊपर तक पानी से भरा हुआ है जब इस वर्तन में सीसे की कुछ गोलियाँ जिनमें प्रत्येक 0.5cm त्रिज्या वाले एक गोला है, डाली जाती हैं तो इसमें से भरे हुए पानी का एक चौथाई भाग बाहर निकल जाता है। वर्तन में डाली गई सीसे की गोलियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:-

माना शंकु की त्रिज्या R तथा गोली की त्रिज्या r है।

माना सीसे की n गोलियाँ शंकु में हैं।

सीसे की गोलियों का आयतन = बाहर निकले हुए पानी का आयतन

$$\Rightarrow n \times (1 \text{ गोली का आयतन}) = (\frac{1}{4} \times \text{शंकु का आयतन})$$

$$\Rightarrow n \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} \pi R^2 h$$

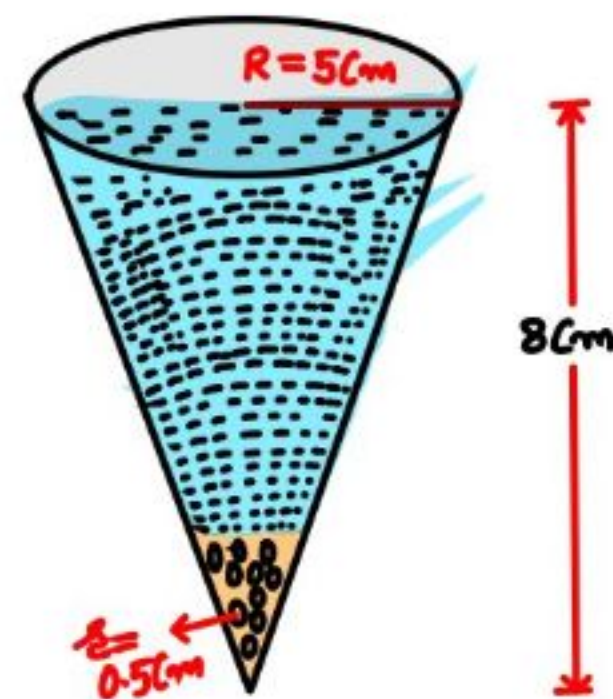
$$\Rightarrow 4n r^3 = \frac{R^2 h}{4}$$

$$\Rightarrow 16n r^3 = R^2 h$$

$$\Rightarrow 16 \times n \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 5 \times 5 \times 8$$

$$\Rightarrow \frac{n}{100} = 1$$

$$\Rightarrow n = 100$$



प्रश्न-6 220 cm और आधार व्यास 24 cm वाले एक बेलन जिस पर ऊँचाई 60 cm त्रिज्या 8 cm वाला एक अन्य बेलन आरोपित है, से लौहा का एक स्तम्भ बना है। इस स्तम्भ का द्रव्यमान ज्ञात कीजिए, जबकि दिया है 1 cm³ लोहे का द्रव्यमान लगभग 8 g होता है। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल :-

माना छोटे बेलन की त्रिज्या r_1 , तथा छोटे बेलन की त्रिज्या r_2 है
माना छोटे बेलन की ऊँचाई h_1 , तथा छोटे बेलन की ऊँचाई h_2 है

$$r_1 = 8 \text{ cm} \quad , \quad h_1 = 60 \text{ cm}$$

$$r_2 = 12 \text{ cm} \quad , \quad h_2 = 220 \text{ cm}$$

स्तम्भ का आयतन

= छोटे बेलन का आयतन + बड़े बेलन का आयतन

$$\pi r_1^2 h_1 + \pi r_2^2 h_2$$

$$\pi (r_1^2 h_1 + r_2^2 h_2)$$

$$= 3.14 \times (8^2 \times 60 + 12^2 \times 220)$$

$$= 3.14 \times (64 \times 60 + 144 \times 220)$$

$$= 3.14 \times (3840 + 31680)$$

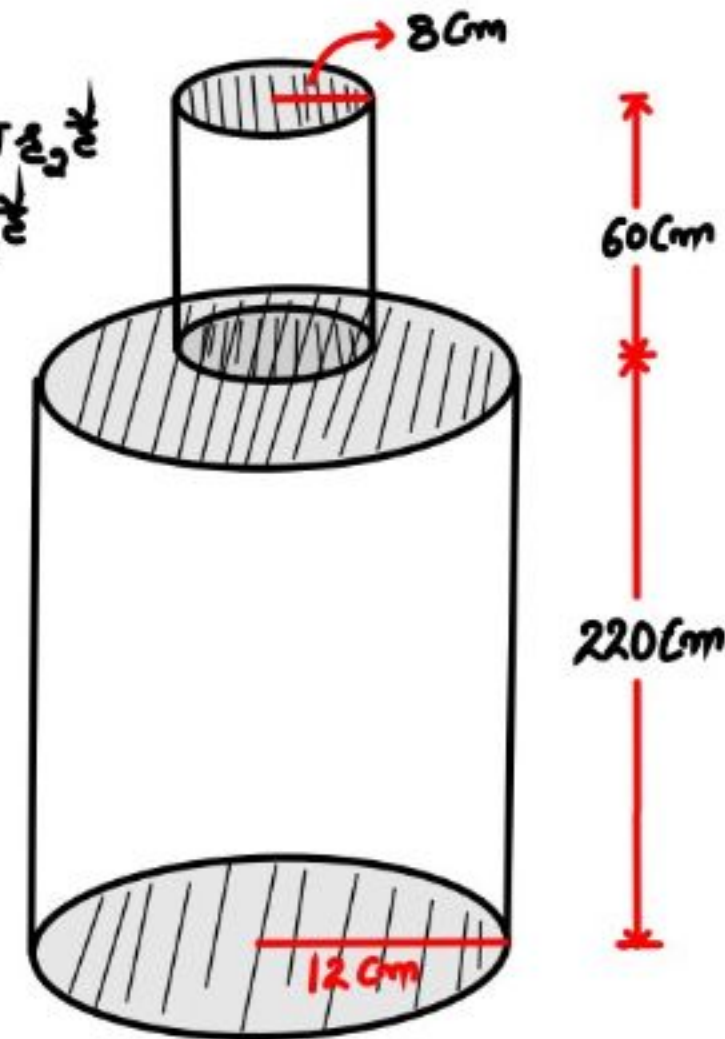
$$= 3.14 \times 35520$$

$$= 111532.8 \text{ cm}^3$$

$$\text{स्तम्भ का द्रव्यमान} = 111532.8 \times 8$$

$$= 892262.4 \text{ g}$$

$$= \frac{892262.4}{1000} = 892.26 \text{ Kg}$$



प्रश्न-7 एक ठोस में, ऊँचाई 120 cm और त्रिज्या 60 cm वाला शंकु को सम्मिलित है 60 cm त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर आरोपित है। इस ठोस को पानी से भरे हुए एक लम्ब वृत्तीय बेलन में इस प्रकार सीधा डाल दिया जाता है कि यह बेलन की तली को स्पर्श करे। यदि बेलन की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 180 cm है तो बेलन में शेष बचे पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल :-

$$r = 60 \text{ cm}$$

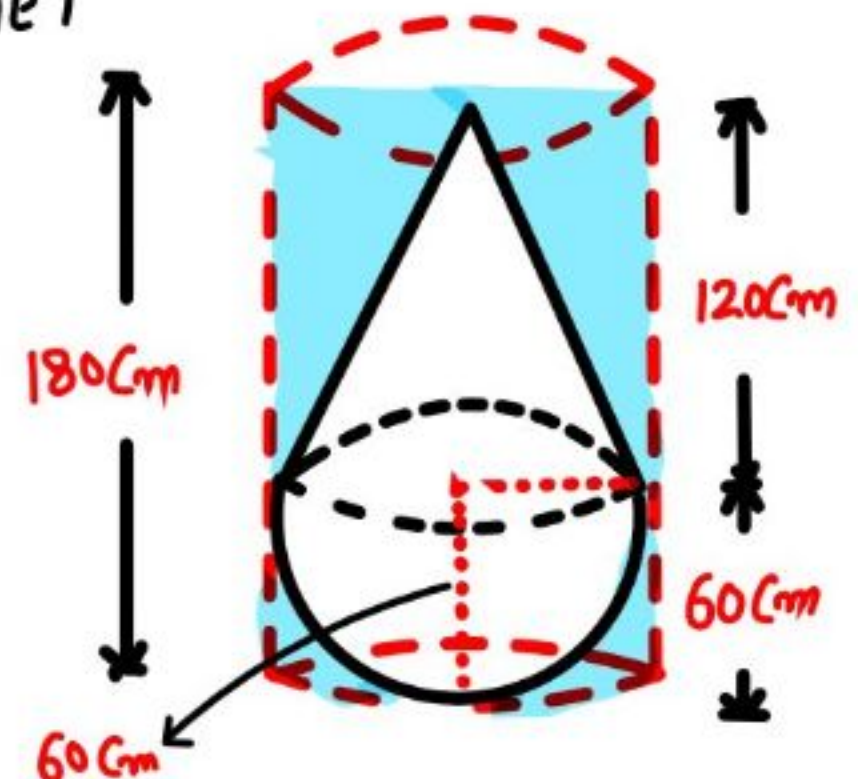
$$\text{शंकु की ऊँचाई} = h = 120 \text{ cm}$$

$$\text{बेलन की ऊँचाई} = H = 180 \text{ cm}$$

बेलन में शेष बचे पानी का आयतन

$$= \text{बेलन का आयतन} - \text{शंकु का आयतन} - \text{अर्धगोले का आयतन}$$

$$= \pi r^2 H - \frac{1}{3} \pi r^2 h - \frac{2}{3} \pi r^3$$



$$\begin{aligned}
 & \pi r^2 \left(H - \frac{h}{3} - \frac{2R}{3} \right) \\
 &= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \times \left(180 - \frac{120}{3} - \frac{2}{3}(60) \right) \\
 &= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \times (180 - 40 - 40) \\
 &= \frac{22}{7} \times 60 \times 60 \times 100 \\
 &= 3.14 \times 60 \times 60 \times 100 \\
 &= 1130400 \text{ cm}^3 \\
 &= \frac{1130400}{100 \times 100 \times 100} \text{ m}^3 = 1.13 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

प्रश्न-8 एक गोलाकार काँच के वर्तन की एक बेलन के आकार की गर्दन है जिसकी लम्बाई 8cm है और व्यास 2cm है जबकि गोलाकार भाग का व्यास 8.5cm है। इसमें भरे जा सकने वाली पानी की मात्रा माप कर, एक बच्चे ने यह शोध किया कि इस वर्तन का आयतन 345 cm³ है। जाँच कीजिए कि उस बच्चे का उत्तर सही है या नहीं, यह मानते हुए कि उपरोक्त मापन आन्तरिक मापन हैं और $\pi = 3.14$ ।

हल :-

माना गोले की त्रिज्या = $R = \frac{8.5}{2} = 4.25 \text{ cm}$

माना बेलन की त्रिज्या = $r = \frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$

बेलन की ऊँचाई = $h = 8 \text{ cm}$

कुल आयतन = गोले का आयतन + बेलन का आयतन

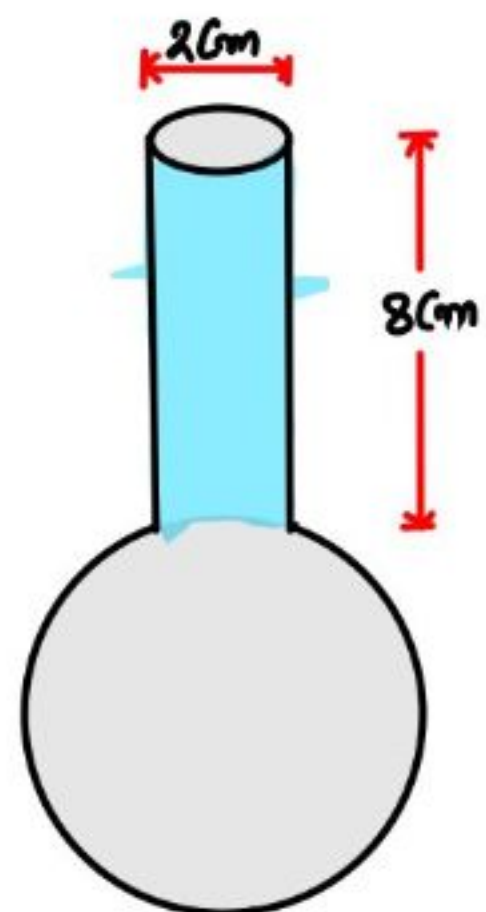
$$= \frac{4}{3} \pi R^3 + \pi r^2 h$$

$$= \pi \left(\frac{4}{3} R^3 + r^2 h \right)$$

$$= 3.14 \left[\frac{4}{3} \times (4.25)^3 + (1)^2 \times 8 \right]$$

$$= 3.14 \times (110.35)$$

$$= 346.51 \text{ cm}^3$$



अतः उस बच्चे का उत्तर सही नहीं है।

उदाहरण-8 मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला एक शंकु बनाया गया है। एक बच्चे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात करो।

हल:-

“आयतन सदैव समान रहेगा”

शंकु का आयतन = गोले का आयतन

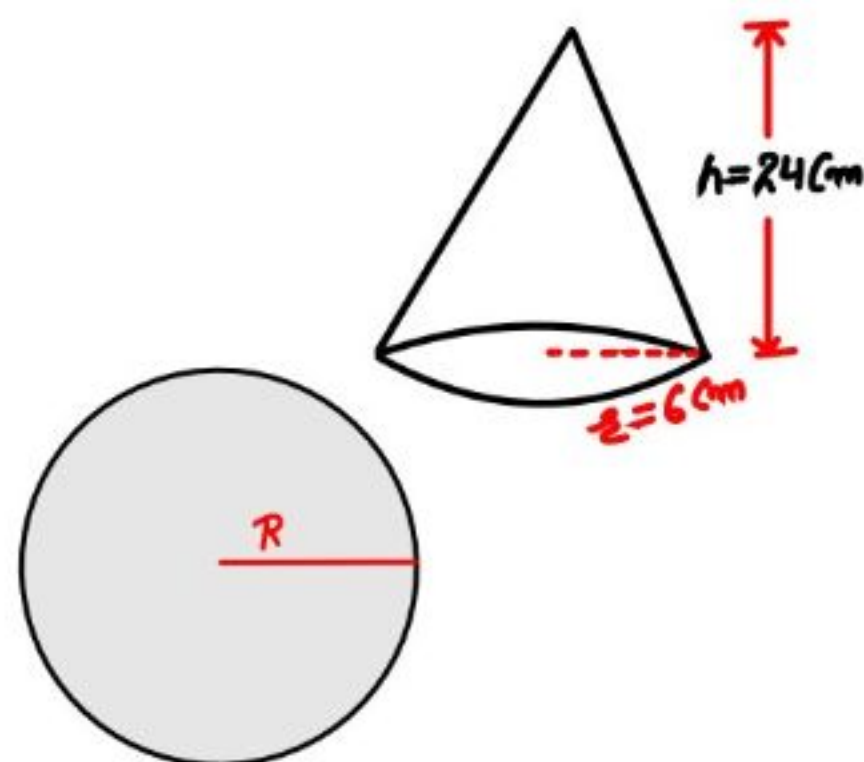
$$\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow r^2 h = 4R^3$$

$$\Rightarrow 6 \times 6 \times 24 = 4R^3$$

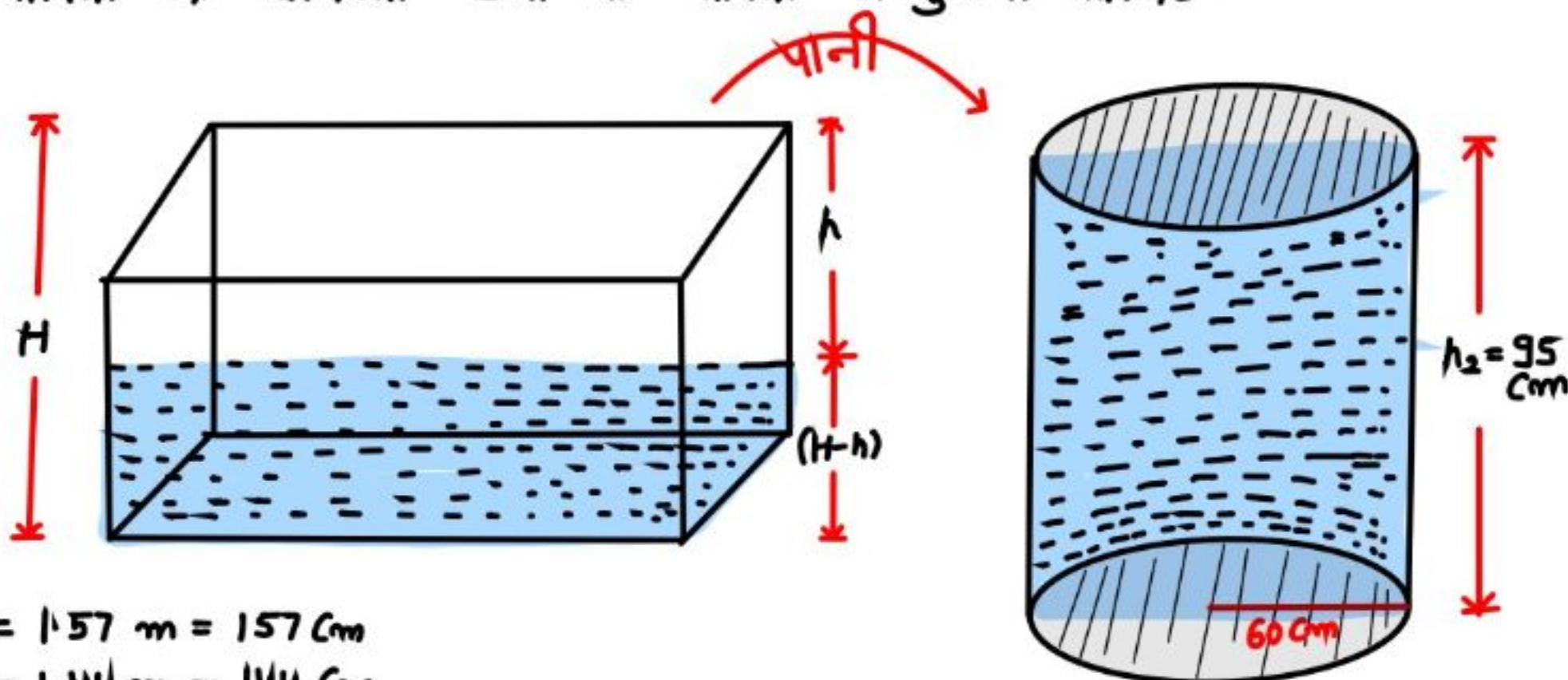
$$\Rightarrow 6^3 = R^3$$

$$\Rightarrow R = 6 \text{ cm}$$



उदाहरण-9 सेल्वी के घर की छत पर बेलन के आकार की एक टंकी है। इस टंकी में एक भूमिगत टंकी में भरे पानी को पंप द्वारा पहुँचा कर टंकी को भरा जाता है। यह भूमिगत टंकी एक घनाभ के आकार की है, जिसकी विमाएँ 1.57 m × 1.44 m × 95 cm हैं। छत की टंकी की त्रिज्या 60 cm है और ऊँचाई 95 cm है। यदि भूमिगत टंकी पानी से पूरी भरी हुई थी, तो उससे छत की टंकी को पूरा भरने के बाद भूमिगत टंकी में पानी कितनी ऊँचाई तक रह जाएगा? छत की टंकी की धारिता की भूमिगत टंकी की धारिता से तुलना कीजिए।

हल:-



$$L = 1.57 \text{ m} = 157 \text{ cm}$$

$$B = 1.44 \text{ m} = 144 \text{ cm}$$

$$H = 95 \text{ cm}$$

खाली हुए पानी का आयतन = बेलनाकार टंकी का आयतन

$$\Rightarrow L \times B \times h = \pi r^2 h_2$$

$$\Rightarrow 157 \times 144 \times h = 3.14 \times 60 \times 60 \times 95$$

$$\Rightarrow h = \frac{3.14 \times 60 \times 60 \times 95}{157 \times 144}$$

$$\Rightarrow h = \frac{95}{2}$$

$$\Rightarrow h = 47.5 \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{टंकी में बचा पानी} &= H - h \\ &= 95 \text{ cm} - 47.5 \text{ cm} \\ &= 47.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{छत की धारिता}}{\text{भूमिगत टंकी की धारिता}} = \frac{3.14 \times 60 \times 60 \times 95}{157 \times 144 \times 95} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण-10 व्यास 1 cm वाली 8 cm लम्बी ताम्बे की एक छड़ को एक समान चौड़ाई वाले 18 cm लम्बे एक तार के रूप में खींचा जाता (बदला जाता) है। तार की मोटाई ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\text{पहले बेलन का आयतन} = \text{दूसरे बेलन का आयतन}$$

$$\Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 8 = r_2^2 \times 1800$$

$$\Rightarrow 2 = r_2^2 \times 1800$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1800} = r_2^2$$

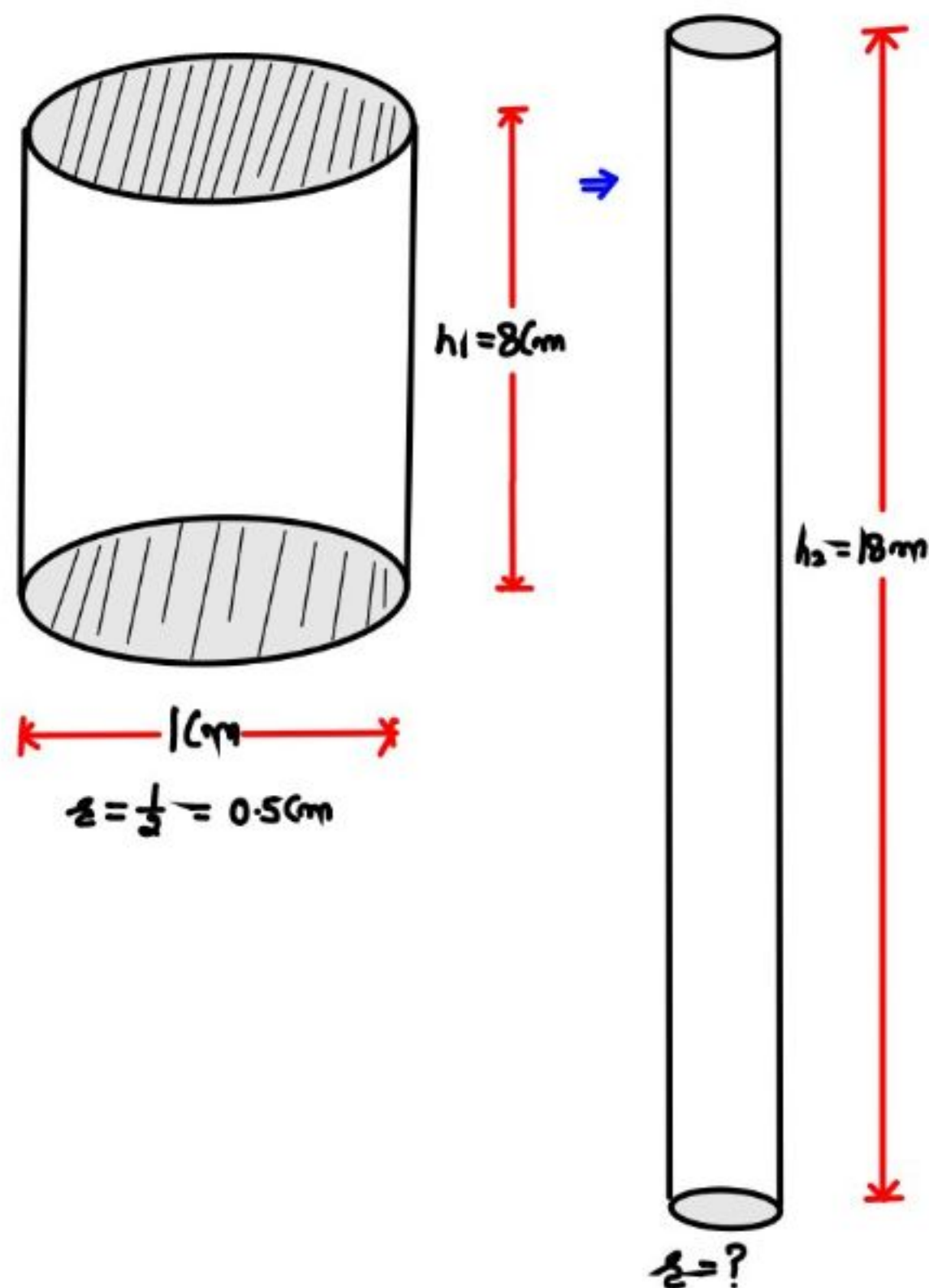
$$\Rightarrow \frac{1}{900} = r_2^2$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{1}{\sqrt{900}}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{1}{30} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned} \text{तार की मोटाई} &= 2 \times r_2 \\ &= 2 \times \frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{15} = 0.066 \text{ cm}$$

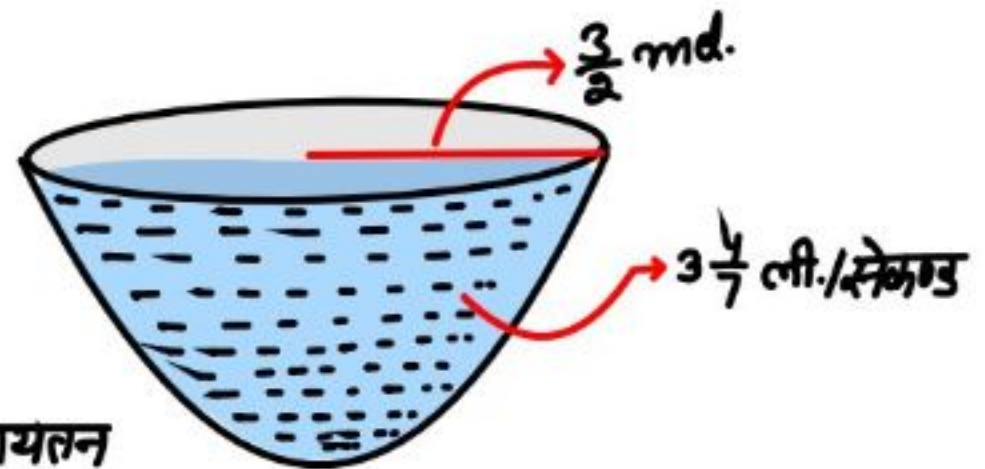


उदाहरण-11 पानी से पूरी भरी हुई एक अर्ध गोलाकार टंकी को एक पाइप द्वारा $3\frac{1}{7}$ लीटर प्रति सेकण्ड की दर से खाली किया जाता है। यदि टंकी का व्यास 3m है, तो वह कितने समय में आधी खाली हो जायेगी।

हल:-

$$r = \frac{3}{2} = 1.5\text{m}.$$

$$\begin{aligned}\text{टंकी का आयतन} &= \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\text{खाली हुए पानी का आयतन} &= \frac{1}{2} \times \text{टंकी का आयतन} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 1.5 \times 1.5 \times 1.5 \\ &= \frac{11 \times 1.5 \times 1.5}{7} \text{m}^3\end{aligned}$$

$$(1\text{ मी.}^3 = 1000\text{ली.})$$

$$\text{खाली हुए पानी का आयतन} = \frac{11 \times 1.5 \times 1.5 \times 1000}{7}$$

$$= \left(\frac{24750}{7}\right) \text{लीटर}$$

$$\frac{25}{7} \text{ली. पानी को खाली होने में लगा समय} = 1 \text{ सेकण्ड}$$

$$1 \text{ली. पानी को खाली होने में लगा समय} = \frac{7}{25} \text{सेकण्ड}$$

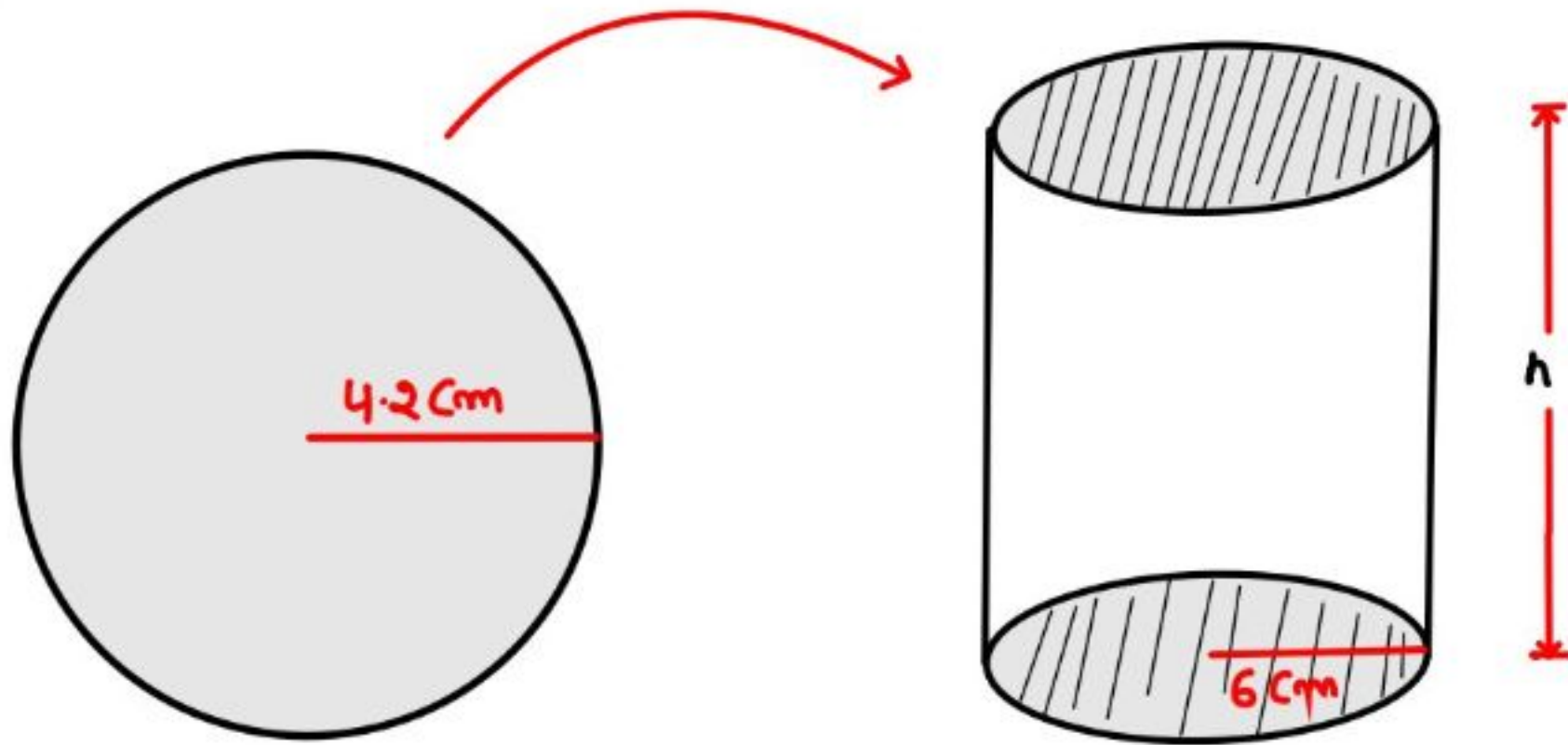
$$\left(\frac{24750}{7}\right) \text{ली. पानी को खाली होने में लगा समय} = \frac{24750}{7} \times \frac{7}{25}$$

$$= 990 \text{ सेकण्ड}$$

$$= \frac{990}{60} = 16.5 \text{ min.}$$

प्रश्नावली 13.3

प्रश्न-1 त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक बेलन के रूप में ढाला जाता है। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
हल:-



माना गोले की त्रिज्या = $R = 4.2 \text{ cm}$
माना बेलन की त्रिज्या = $r = 6 \text{ cm}$

गोले का आयतन = बेलन का आयतन

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = \pi r^2 h$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2 = 6 \times 6 \times h$$

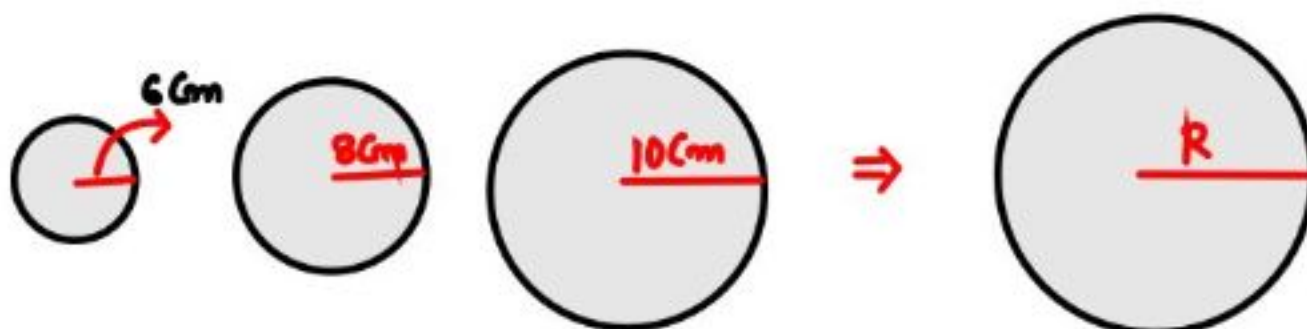
$$\Rightarrow \frac{4 \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2}{3 \times 6 \times 6 \times 1000} = h$$

$$\Rightarrow \frac{4 \times 7 \times 7 \times 14}{1000} = h$$

$$\Rightarrow \frac{2744}{1000} = h$$

$$\Rightarrow h = 2.744 \text{ cm}$$

प्रश्न-2 क्रमशः 6 cm, 8 cm, और 10 cm त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोलों को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
हल:-



तीनों गोलों का कुल आयतन = नये गोले का आयतन

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \frac{4}{3} \pi r_2^3 + \frac{4}{3} \pi r_3^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\Rightarrow 6^3 + 8^3 + 10^3 = R^3$$

$$\Rightarrow 216 + 512 + 1000 = R^3$$

$$\Rightarrow 1728 = R^3$$

$$\Rightarrow 12^3 = R^3$$

$$\Rightarrow R = 12 \text{ cm}$$

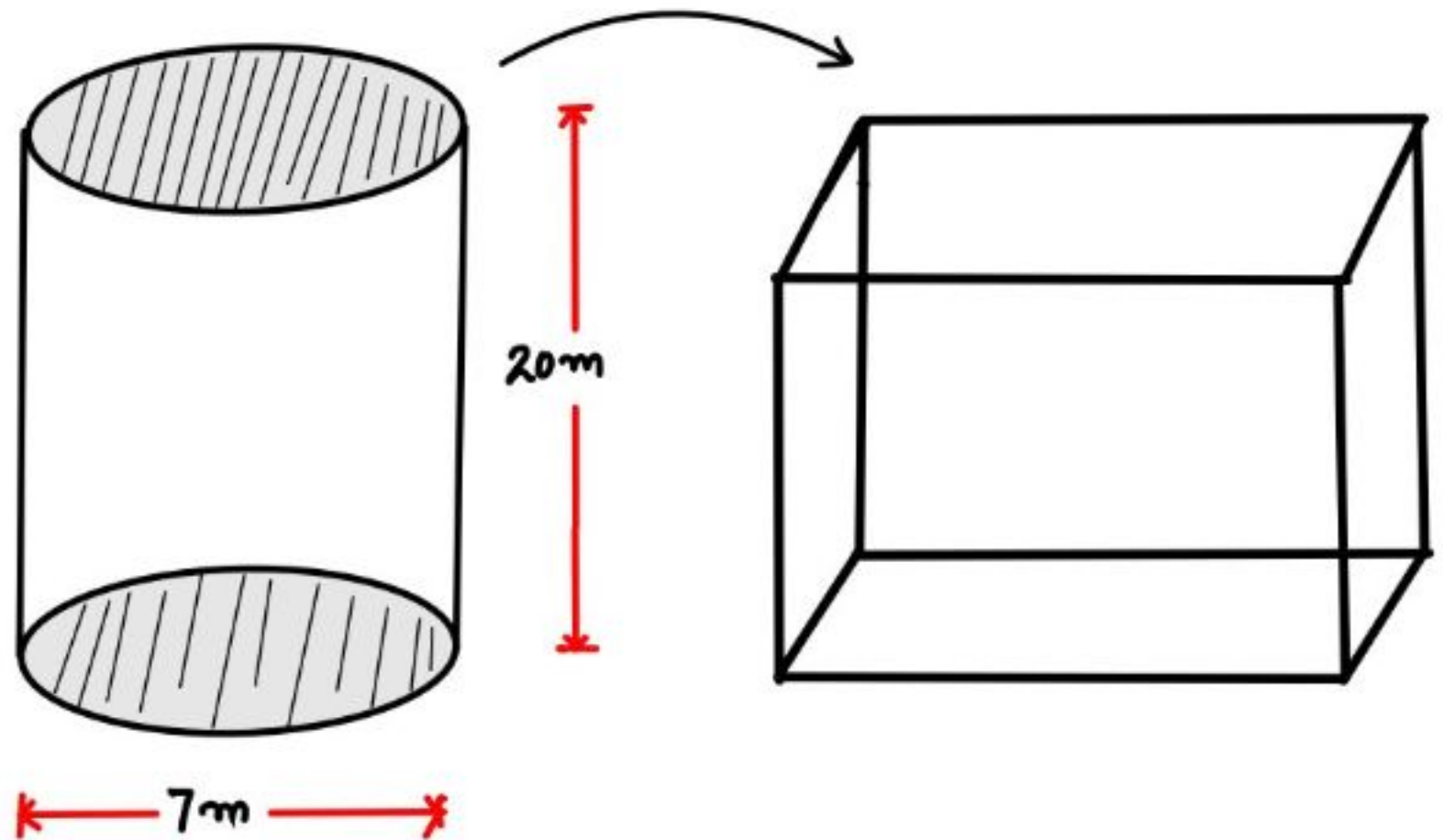
प्रश्न-3 व्यास 7m वाला 20m गहरा एक कुआ खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22m x 14m वाला एक चबुतरा बनाया गया है। इस चबुतेरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल -

$$l = 22 \text{ m}$$

$$b = 14 \text{ m}$$

$$h = ?$$



बेलन का आयतन = घनाभ का आयतन

$$\Rightarrow \pi r^2 h = l \times b \times h$$

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \times 20 = 22 \times 14 \times h$$

$$\Rightarrow h = \frac{10}{1} \text{ m}$$

$$\Rightarrow h = 10 \text{ m}$$

प्रश्न-4 व्यास 3cm का एक कुआँ 14cm की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुएँ के चारों ओर 4cm चौड़ी एक वृत्ताकार वलय (ring) बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक प्रकार का बाँध बनाया जाता है। इस बाँध की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:-

$$\text{साना कुँए की त्रिज्या} = r_1 \text{ cm}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ cm} = 1.5 \text{ cm}$$

$$\text{साना बाँध की त्रिज्या} = r_2 \text{ cm}$$

$$= \frac{11}{2} = 5.5 \text{ cm}$$

कुँए का आयतन = बाँध का आयतन

$$\pi r_1^2 H = \text{बाहरी वेलन का आयतन} - \text{आन्तरिक वेलन का आयतन}$$

$$\Rightarrow \pi r_1^2 H = \pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h$$

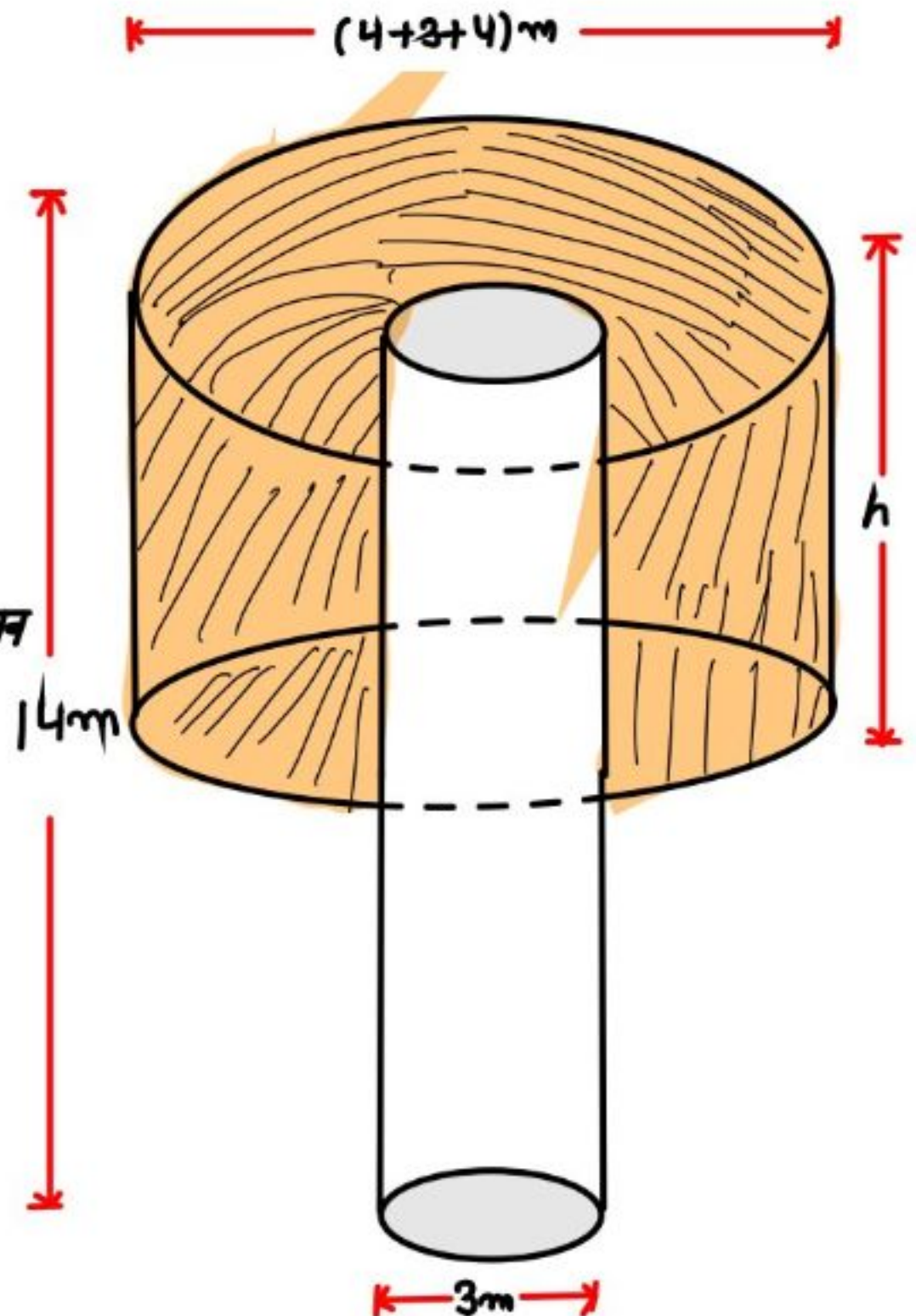
$$\Rightarrow \pi r_1^2 H = \pi h (r_2^2 - r_1^2)$$

$$\Rightarrow 1.5 \times 1.5 \times 14 = h (5.5^2 - (1.5)^2)$$

$$\Rightarrow 1.5 \times 1.5 \times 14 = h \times 28$$

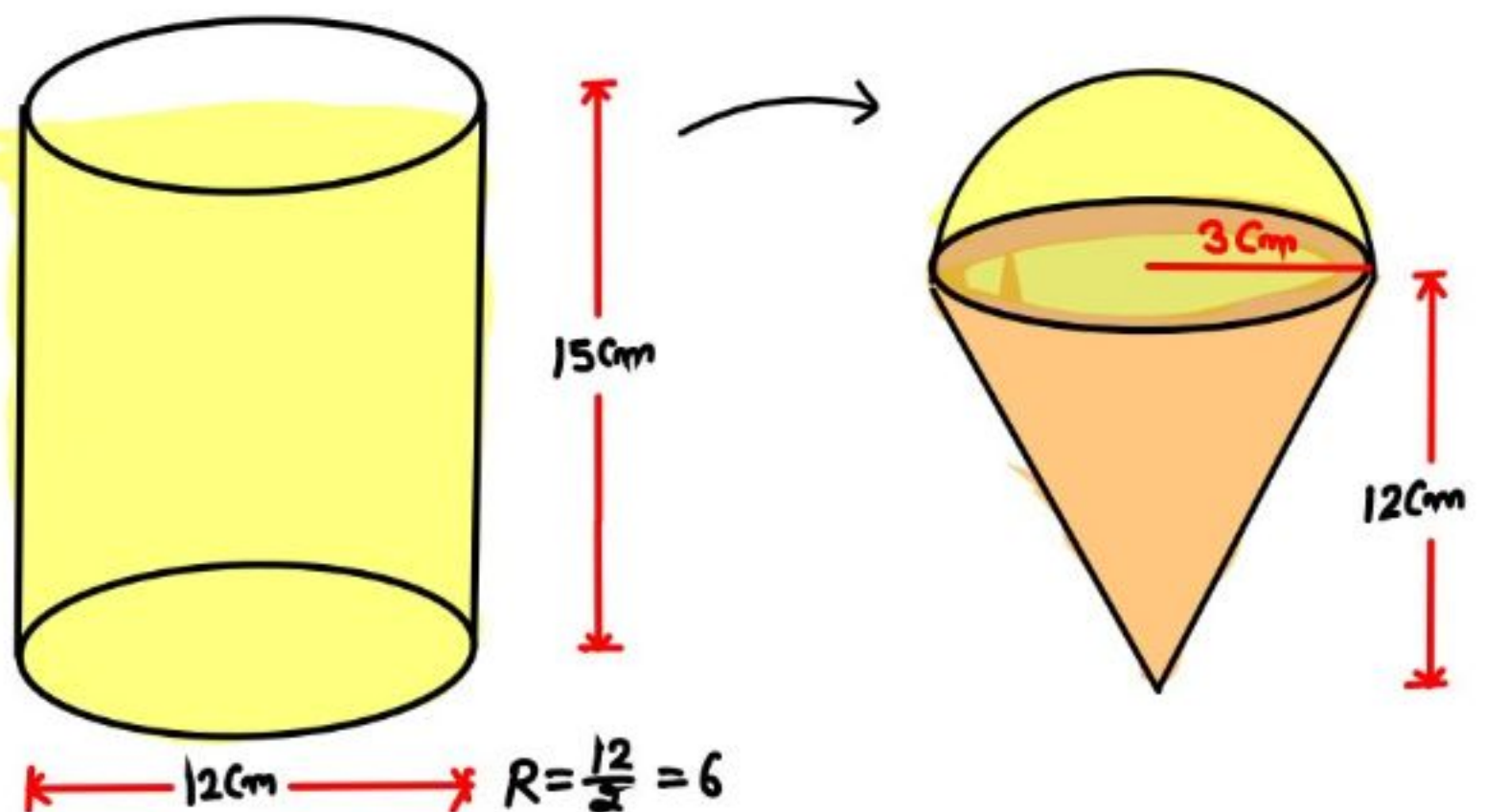
$$\Rightarrow h = \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{28}$$

$$\Rightarrow h = \frac{2.25}{2} = 1.125 \text{ m.}$$



प्रश्न-5 व्यास 12cm और ऊँचाई 15 cm वाले एक लम्ब वृत्तीय वेलन के आकार का बर्तन आइसक्रीम से पुरा भरा हुआ है। इस आइसक्रीम को ऊँचाई 12cm और व्यास 6cm वाले शंकुओं में भरा जाता है, जिनका ऊपरी सिरा अर्ध गोलाकार होगा। उन शंकुओं की संख्या ज्ञात कीजिए जो इस आइसक्रीम से भरे जा सकते हैं।

हल:-



माना n शंकुओं में आइसक्रीम भरी जा सकती है।

बेलन का आयतन = $n \times$ आइसक्रीम के शंकु का आयतन

$$\Rightarrow \pi R^2 H = n \times (\text{शंकु का आयतन} + \text{अर्धगोले का आयतन})$$

$$\Rightarrow \pi R^2 H = n \times \left[\frac{1}{3} \pi r^2 h + \frac{2}{3} \pi r^3 \right]$$

$$\Rightarrow \pi R^2 H = n \times \frac{\pi}{3} r^2 (h + 2r)$$

$$\Rightarrow 6 \times 6 \times 15 = \frac{n}{2} \times 3 \times 3 \times (12 + 6)$$

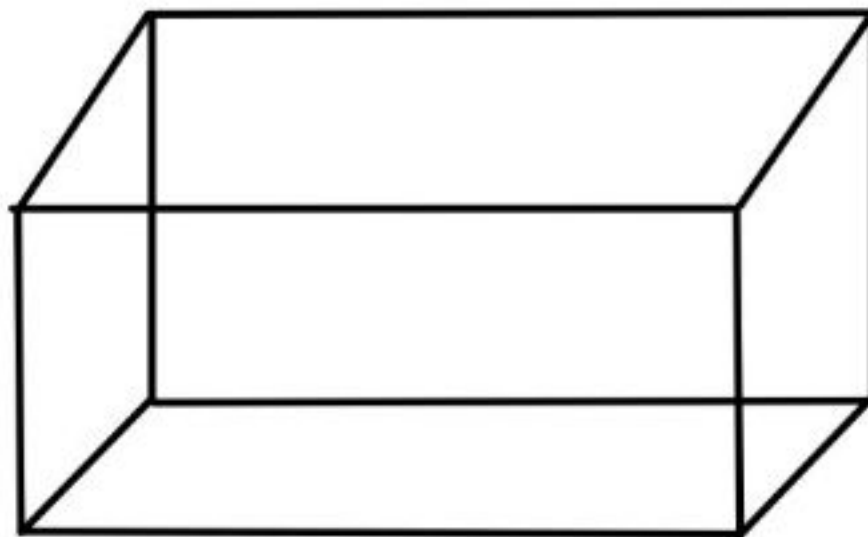
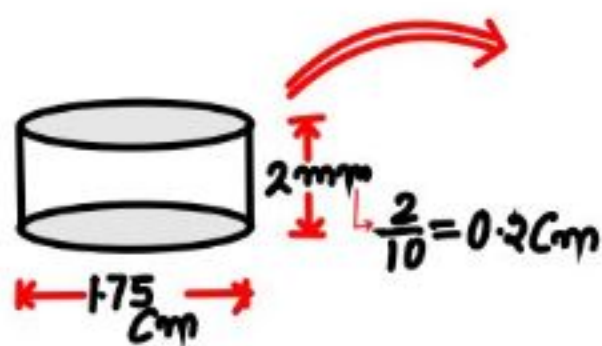
$$\Rightarrow 6 \times 2 \times 15 = n \times 18$$

$$\Rightarrow n = \frac{6 \times 2 \times 15}{18}$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 10}$$

प्रश्न-6 विमाओं $5.5 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 3.5 \text{ cm}$ वाला एक घनाभ बनाने के लिए, 1.75 cm व्यास और 2 mm मोटाई वाले कितने चांदी के सिक्कों को पिघलाना पड़ेगा?

हल:-



$$\begin{aligned} L &= 5.5 \text{ cm} \\ b &= 10 \text{ cm} \\ H &= 3.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

माना n चांदी के सिक्कों को पिघलाकर घनाभ बनाया जाता है तो,
 n चांदी के सिक्कों का आयतन = घनाभ का आयतन

$$\Rightarrow n \times \text{बेलन का आयतन} = l \times b \times H$$

$$\Rightarrow n \times \pi r^2 h = l \times b \times H$$

$$\Rightarrow n \times \frac{22}{7} \times \frac{1.75}{2} \times \frac{1.75}{2} \times 0.2 = 5.5 \times 10 \times 3.5$$

$$\Rightarrow n \times \frac{11}{7} \times 1.75 \times 1.75 = 55 \times 35$$

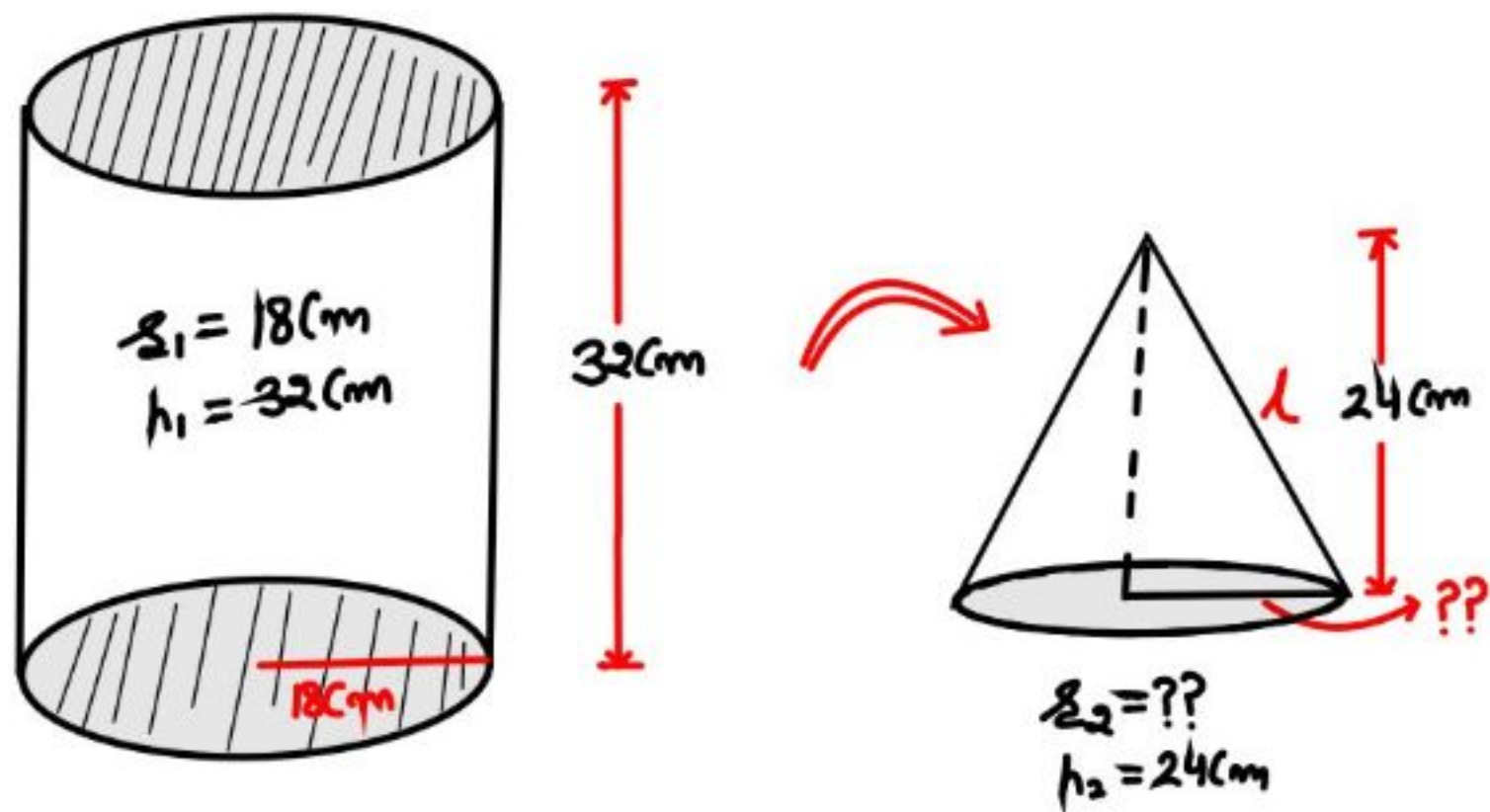
$$\Rightarrow n = \frac{55 \times 35 \times 7}{11 \times 1.75 \times 1.75}$$

$$\Rightarrow n = \frac{100 \times 100}{25}$$

$$\Rightarrow n = 400$$

प्रश्न-7, 32 cm ऊँची और आधार त्रिज्या 18 cm वाली एक बेलनाकार वाली रेत से भरी हुई है। इस वाली को भूमि पर खाली किया जाता है और इस रेत की एक शंक्वाकार ढेरी बनाई जाती है। यदि शंक्वाकार ढेरी की ऊँचाई 24 cm है, तो इस ढेरी की त्रिज्या और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:-



बेलन का आयतन = शंकु का आयतन

$$\Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \frac{1}{3} \pi r_2^2 h_2$$

$$\Rightarrow 18 \times 18 \times 32 = \frac{1}{3} \times r_2^2 \times 24$$

$$\Rightarrow \frac{18 \times 18 \times 32}{8} = r_2^2$$

$$\Rightarrow 18 \times 18 \times 2 \times 2 = r_2^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{18 \times 18 \times 2 \times 2} = r_2$$

$$\Rightarrow 18 \times 2 = r_2$$

$$\Rightarrow r_2 = 36 \text{ cm}$$

$$l^2 = r^2 + h^2$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{36^2 + 24^2}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{1296 + 576}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{1872}$$

$$\Rightarrow l = \sqrt{144 \times 13}$$

$$\Rightarrow l = 12\sqrt{13} \text{ cm}$$

प्रश्न-8 6m चौड़ी और 1.5m गहरी एक नहर में पानी 10 km/h की चाल से बह रहा है। 30 मिनट में, यह नहर कितने क्षेत्रफल की सिंचाई कर पाएगी, जबकि सिंचाई के लिए 8cm गहरे पानी की आवश्यकता होती है।

हल:-

$$30 \text{ min} \rightarrow 5 \text{ km} = 5000 \text{ m}$$

$$b_1 = 6 \text{ met.}, h_1 = 1.5 \text{ met.}$$

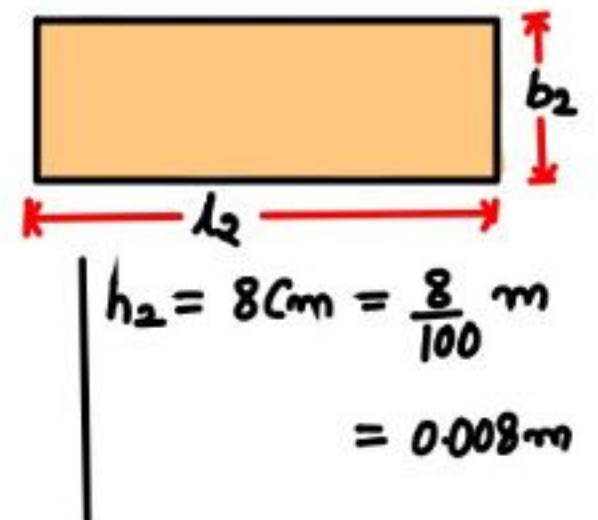
30 मिनट में नहर से प्राप्त हुआ पानी = खेत का आयतन

$$\Rightarrow l_1 \times b_1 \times h_1 = l_2 \times b_2 \times h_2$$

$$\Rightarrow 5000 \times 6 \times 1.5 = A \times 0.08$$

$$\Rightarrow A = \frac{5000 \times 6 \times 1.5}{0.08}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 562500 \text{ m}^2}$$



प्रश्न-9 एक किसान अपने खेत में बनी 10m व्यास वाली और 2m गहरी एक बेलनाकार टंकी को आन्तरिक व्यास 20cm वाले एक पाइप द्वारा एक नहर से जोड़ता है। यदि पाइप में पानी 3km/h की चाल से बह रहा है, तो कितने समय बाद टंकी पूरी भर जाएगी?

हल:-

नहर से जुड़े पाइप द्वारा निकले पानी का आयतन = खेत में रखी बेलनाकार टंकी का आयतन

$$\Rightarrow \pi r_1^2 h_1 = \pi r_2^2 h_2$$

$$\Rightarrow 0.1 \times 0.1 \times h_1 = 5 \times 5 \times 2$$

$$\Rightarrow \frac{h_1}{100} = 50$$

$$\Rightarrow \boxed{h_1 = 5000 \text{ met.}}$$

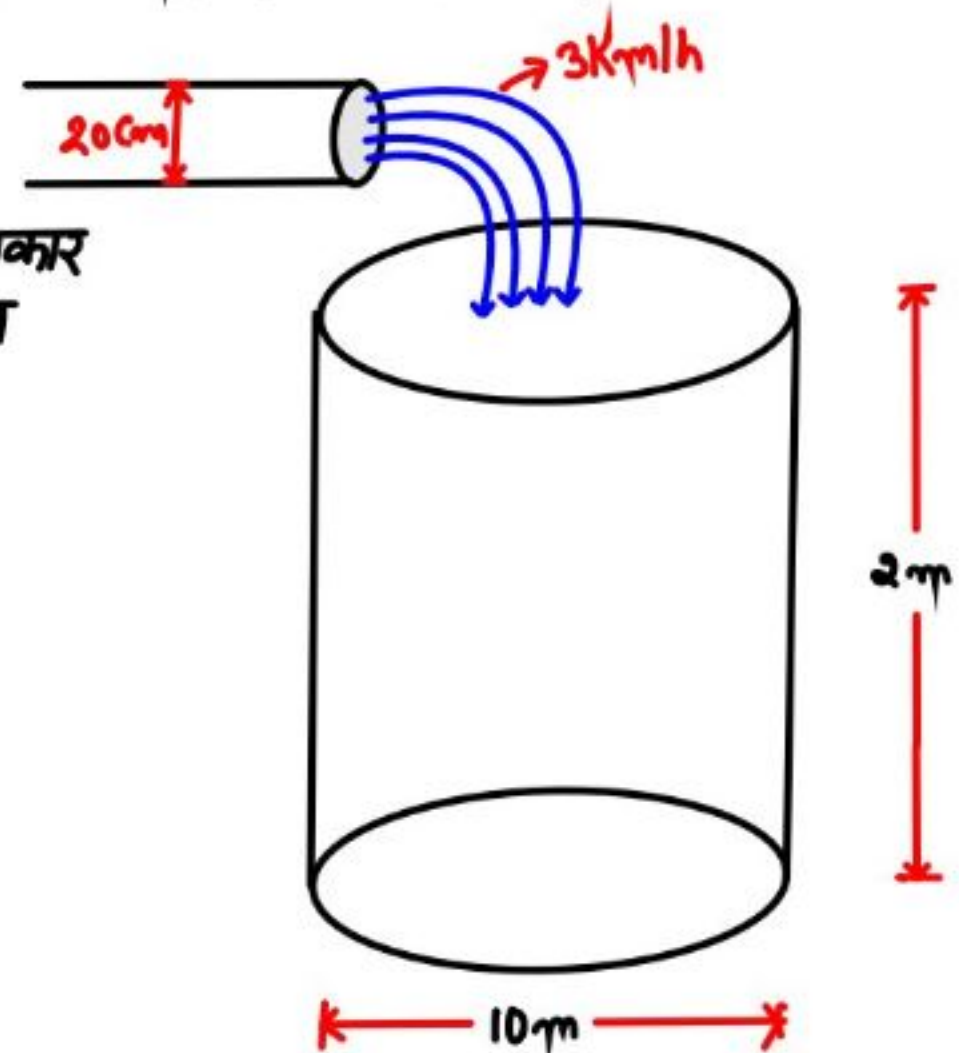
$$\text{दूरी} = 5000 \text{ मी.} = 5 \text{ km}$$

$$\text{चाल} = 3 \text{ km/h}$$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}}$$

$$= \frac{5}{3} \text{ घण्टे}$$

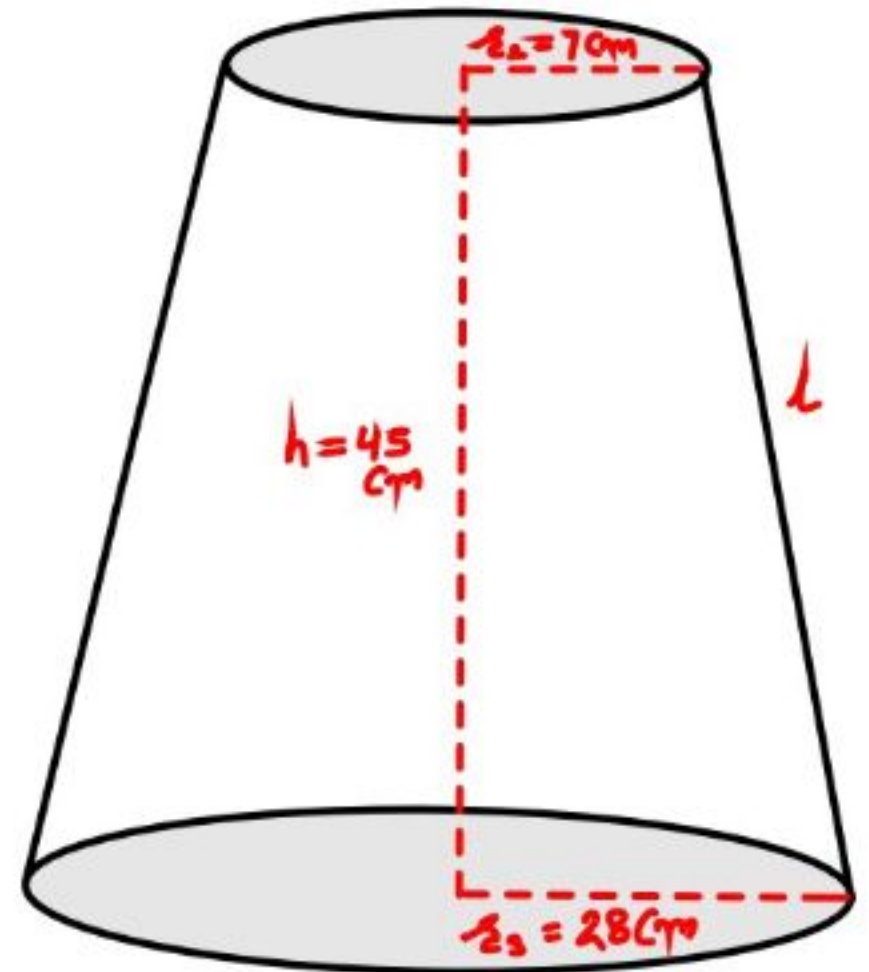
$$= \frac{5}{3} \times 60 = \boxed{100 \text{ मिनट}}$$



उदाहरण-12 एक शंकु के चिन्नक, जो 45cm ऊँचा है, के सिरों की त्रिज्याएँ 28cm और 7cm हैं। इसका आयतन, वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल:-

$$\begin{aligned} (r_1 - r_2)^2 + h^2 &= l^2 \\ \Rightarrow (28 - 7)^2 + (45)^2 &= l^2 \\ \Rightarrow (21)^2 + (45)^2 &= l^2 \\ \Rightarrow 441 + 2025 &= l^2 \\ \Rightarrow 2466 &= l^2 \\ \Rightarrow l &= \sqrt{2466} \\ \Rightarrow l &= 49.65 \text{ cm} \end{aligned}$$



वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi (r_1 + r_2) l$

$$\begin{aligned} &= \frac{22}{7} (28 + 7) (49.65) \\ &= \frac{22}{7} \times 35 \times 49.65 \\ &= 5461.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi (r_1 + r_2) l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

$$\begin{aligned} &= 5461.5 + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 \\ &= 5461.5 + \frac{22}{7} \times 28 \times 28 + \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \\ &= 5461.5 + 2464 + 154 \\ &= 8079.5 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

आयतन $= \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times [28^2 + 7^2 + (28)(7)] \times 45 \\ &= \frac{22}{21} \times [784 + 49 + 196] \times 45 \\ &= \frac{22}{21} \times 1029 \times 45 \\ &= 48510 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

उदाहरण-13 हनुमप्पा और उसकी पत्नी गंगाम्पा गन्ने के रस से गुड़ बना रहे हैं। उन्होंने गन्ने के रस को करके राब (शीरा) बना ली है, जिसे शंकु के छिन्नक के आकार के साँचों में डाला जाता है, जिनमें से प्रत्येक के दोनों वृत्तीय फलकों के व्यास क्रमशः 30cm और 35cm हैं तथा साँचे की ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 14cm है। यदि 1cm³ राब का द्रव्यमान लगभग 1.2g है तो प्रत्येक साँचे में भरी जा सकने वाली राब का द्रव्यमान ज्ञात करें।

हल:-

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times [(17.5)^2 + (15)^2 + (17.5)(15)] 14$$

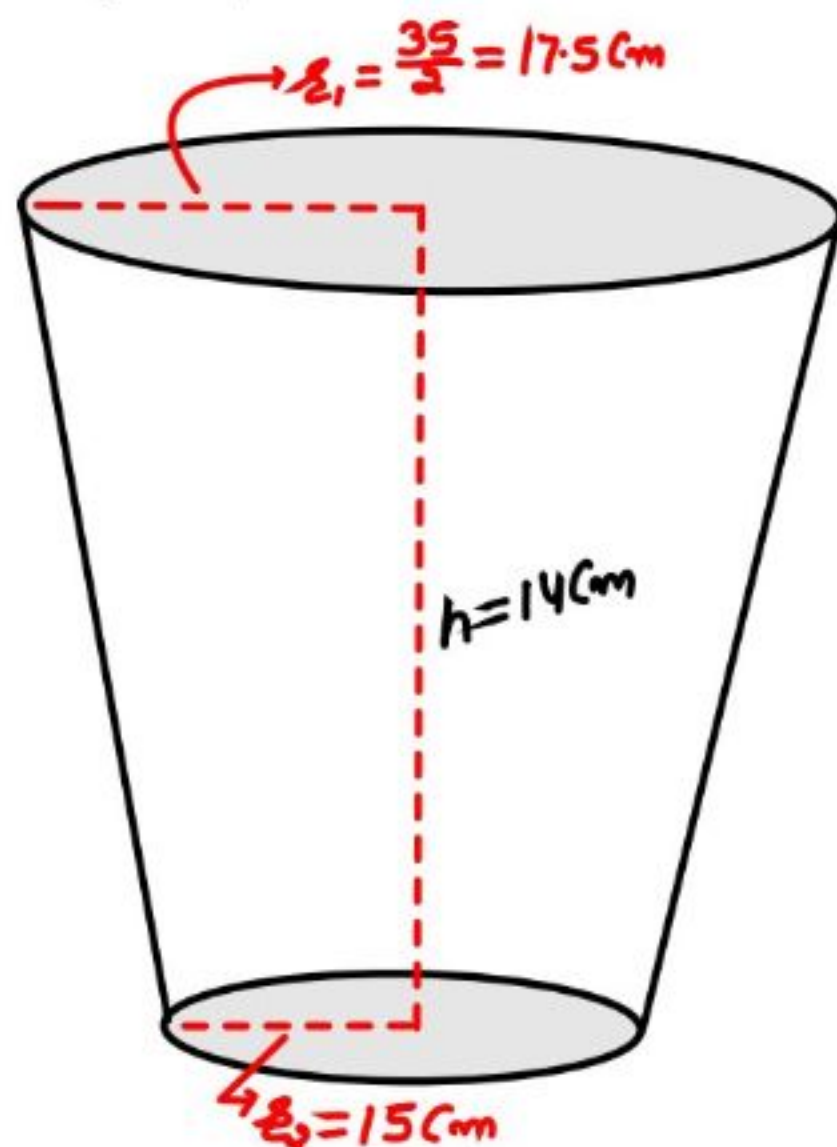
$$= \frac{44}{3} \times 793.75$$

$$= 11641.66 \text{ cm}^3$$

$$\text{द्रव्यमान} = 11641.66 \times 1.2$$

$$= 13969.99 \approx 13970 \text{ g}$$

$$= \frac{13970}{1000} = 13.97 \text{ Kg} \approx 14 \text{ Kg}$$



उदाहरण 14 धातु से बनी एक खुली वाली शंकु के एक छिन्नक के आकार की है, जो उसी धातु के बने एक खोखले बेलनाकार आधार पर आरोपित है। इस वाली के दोनों वृत्ताकार सिरों के व्यास 45cm और 25cm हैं तथा वाली के कुल ऊर्ध्वाधर ऊँचाई 40cm और बेलनाकार आधार की ऊँचाई 6cm है। इस वाली को बनाने में प्रयुक्त धातु की चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि हम वाली की मुठिया या हथ्थे को इसमें सम्मिलित नहीं कर रहे हैं। साथ ही उस पानी का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल:-

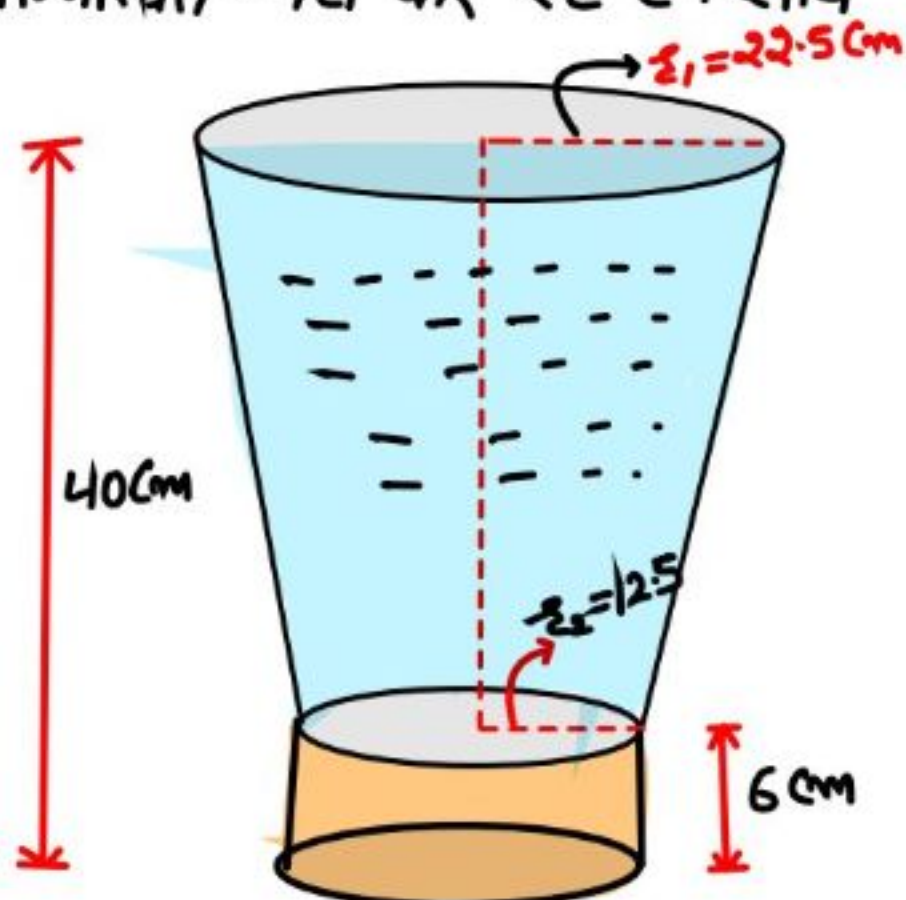
$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times [(22.5)^2 + (12.5)^2 + (22.5)(12.5)] 34$$

$$= \frac{22}{21} \times [506.25 + 156.25 + 281.25] 34$$

$$= \frac{22}{21} \times 943.75 \times 34$$

$$= 33615.48 \text{ cm}^3$$



$$\Rightarrow (r_1 - r_2)^2 + h^2 + L^2$$

$$\Rightarrow (22.5 - 12.5)^2 + (34)^2 = L^2$$

$$\Rightarrow 100 + 1156 = L^2$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{1256}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = 35.44}$$

$$\text{धातु का क्षेत्रफल} = \text{शंकु के छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} + \text{घृत का क्षेत्रफल}$$

$$= \pi (r_1 + r_2) L + 2\pi r_2 h + \pi r_2^2$$

$$= \frac{22}{7} \times (22.5 + 12.5) \times 35.44 + 7\pi r_2 (2h + r_2)$$

$$= \frac{22}{7} \times 35 \times 35.44 + \frac{22}{7} \times 12.5 \times (12 + 12.5)$$

$$= 3898.4 + \frac{22}{7} \times 12.5 \times 24.5$$

$$= 3898.4 + 962.5$$

$$= \boxed{4860.6 \text{ cm}^2}$$

प्रश्नावली 13.4

प्रश्न-1 पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के छिन्नक के आकार का है। दोनो वृत्ताकार सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

हल:-

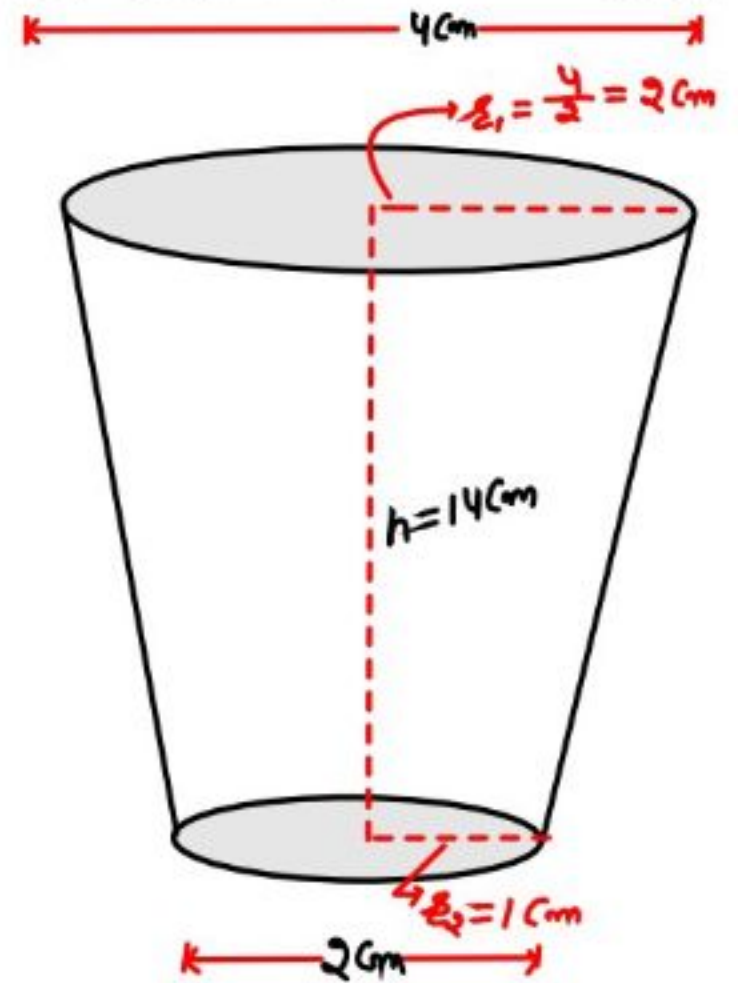
$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times [2^2 + 1^2 + 2(1)] \times 14$$

$$= \frac{22}{3} \times (4 + 1 + 2) \times 2$$

$$= \frac{44}{3} \times 7$$

$$= 102.66 \text{ cm}^3$$



प्रश्न-2 एक शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके वृत्तीय सिरों के परिमाण (परिधियाँ) 18 cm और 6 cm हैं। इस छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

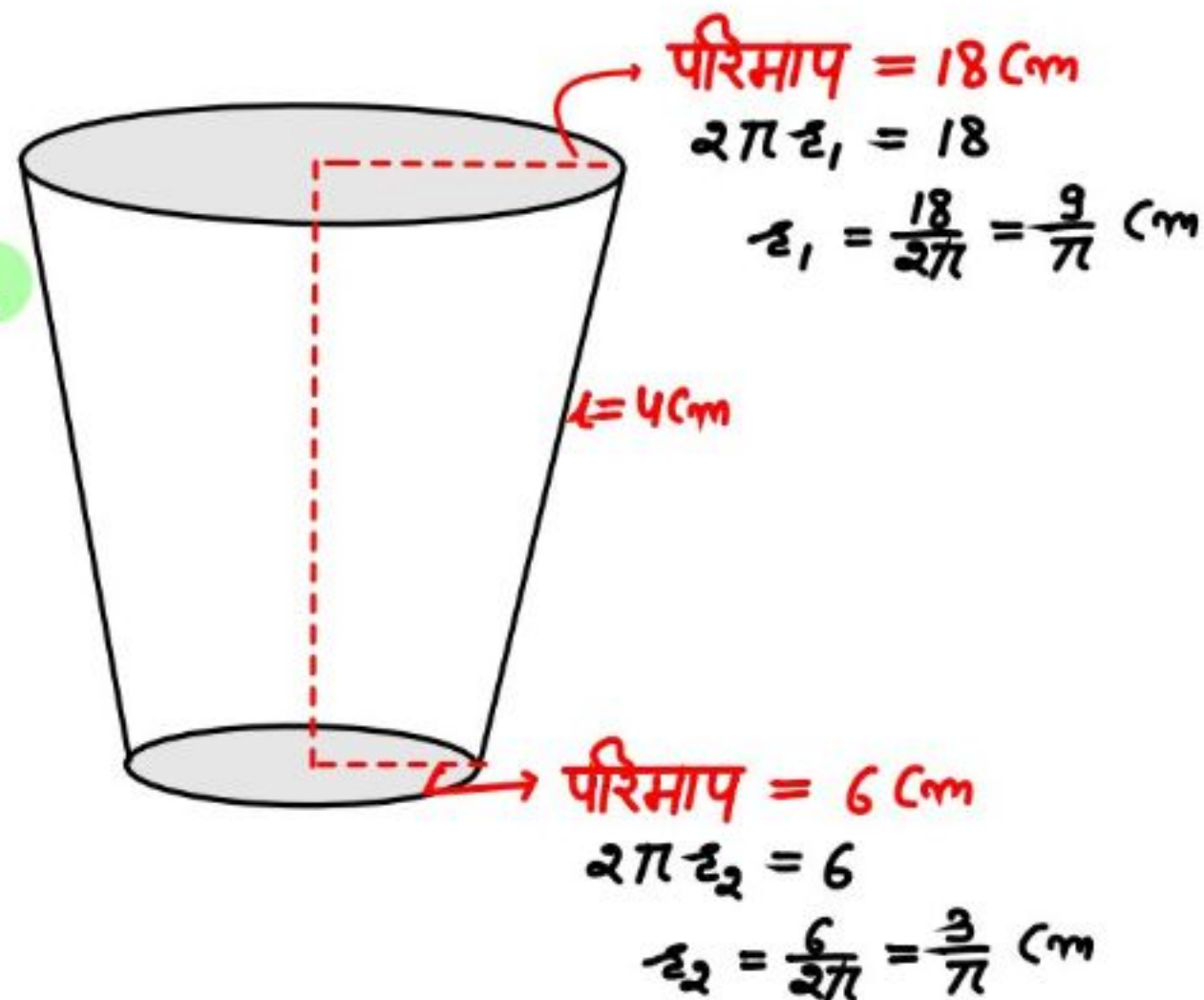
$$\text{वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = \pi (r_1 + r_2) l$$

$$= \pi \left(\frac{9}{\pi} + \frac{3}{\pi} \right) 4$$

$$= \pi \left(\frac{9+3}{\pi} \right) 4$$

$$= 12 \times 4$$

$$= 48 \text{ cm}^2$$



प्रश्न-3 एक तुर्की टोपी शंकु के एक छिन्नक के आकार की है। यदि इसके खुले सिरों की त्रिज्या 10 cm है, ऊपरी सिरों की त्रिज्या 4 cm है और टोपी की तिर्यक ऊँचाई 15 cm है, तो इसके बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल:-

टोपी को बनाने में प्रयुक्त पदार्थ का क्षेत्रफल

= चिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल +
ऊपरी घनाकार भाग का क्षेत्रफल

$$= \pi (r_1 + r_2) l + \pi r_2^2$$

$$= \pi [(r_1 + r_2) l + r_2^2]$$

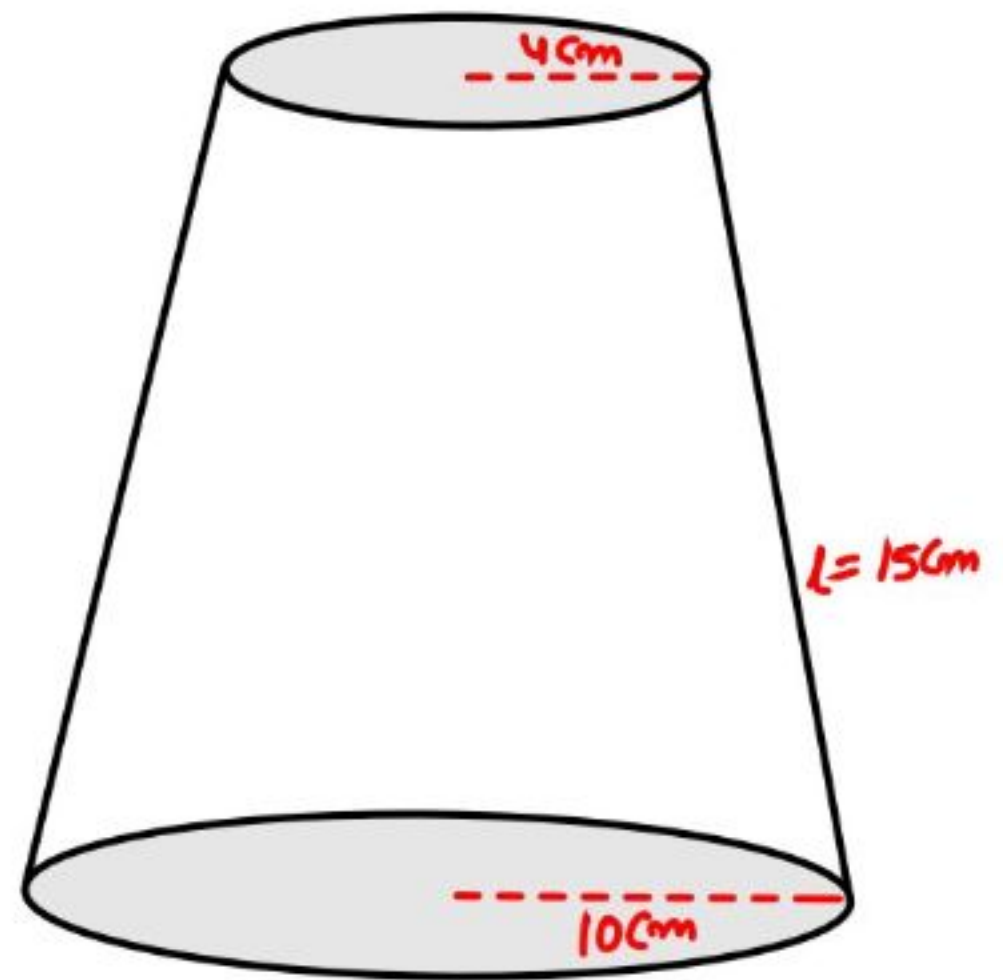
$$= \frac{22}{7} (10 + 4) 15 + 16$$

$$= \frac{22}{7} [(14)(15) + 16]$$

$$= \frac{22}{7} (210 + 16)$$

$$= \frac{22 \times 226}{7}$$

$$= 710.285 \text{ cm}^2$$



प्रश्न-4 धातु की चादर से बना और ऊपर से खुला एक वर्तन शंकु के एक चिन्नक के आकार का है, जिसकी ऊँचाई 16 cm है तथा निचले और ऊपरी सिरों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 cm और 20 cm हैं। 20 रुपये प्रति लीटर की दर से, इस वर्तन को पूरा भर सकने वाले द्रव्य का मूल्य ज्ञात कीजिए। साथ ही इस वर्तन को बनाने के लिए प्रयुक्त धातु की चादर का मूल्य 8 रुपये प्रति 100 cm² की दर से ज्ञात कीजिए। ($\pi = 3.14$ लीजिए)

हल:-

$$\text{आयतन} = \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h$$

$$= \frac{1}{3} \times 3.14 \times [20^2 + 8^2 + (20)(8)] 16$$

$$= \frac{3.14}{3} \times (400 + 64 + 160) \times 16$$

$$= \frac{3.14}{3} \times 624 \times 16$$

$$= 3.14 \times 208 \times 16$$

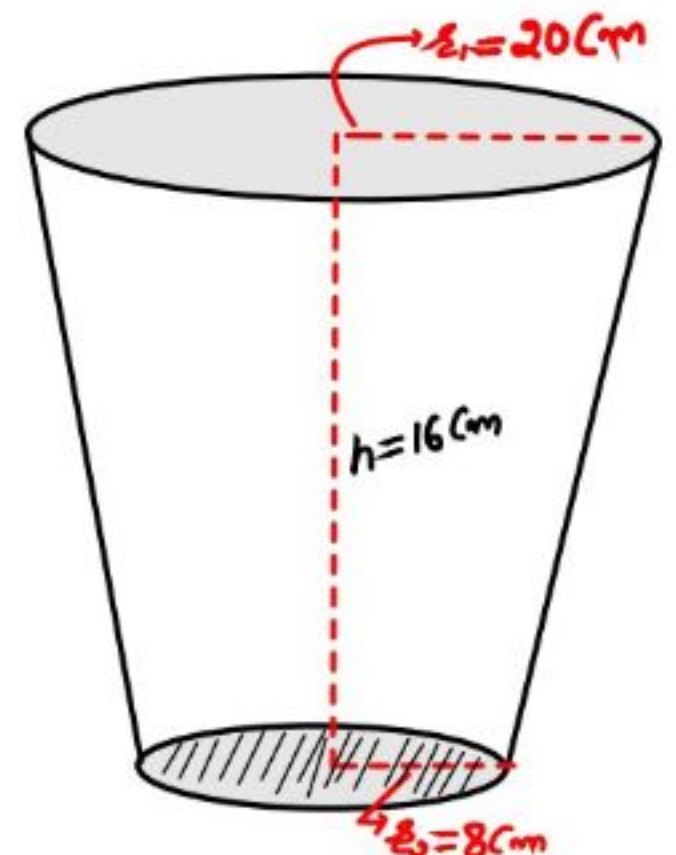
$$= 10449.92 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ लीटर}$$

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ लीटर}$$

$$= \frac{10449.92}{1000} = 10.44992 \text{ लीटर}$$

$$\approx 10.45 \text{ लीटर}$$



$$1 \text{ लीटर दूध का मूल्य} = 20 \text{ रुपये}$$

$$10.45 \text{ लीटर दूध का मूल्य} = 20 \times 10.45$$

$$= 209 \text{ रुपये}$$

$$L^2 = (x_1 - x_2)^2 + h^2$$

$$\Rightarrow L^2 = (20 - 8)^2 + 16^2$$

$$\Rightarrow L^2 = 12^2 + 16^2$$

$$\Rightarrow L^2 = 144 + 256$$

$$\Rightarrow L^2 = 400$$

$$\Rightarrow L = \sqrt{400}$$

$$\Rightarrow L = 20 \text{ cm}$$

धातु की चादर का क्षेत्रफल

= चिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल

$$= \pi (r_1 + r_2) L + \pi r_2^2$$

$$= \pi [(r_1 + r_2) L + r_2^2]$$

$$= 3.14 [28(20) + 8^2]$$

$$= 3.14 (560 + 64)$$

$$= 3.14 \times 624$$

$$= 1959.36 \text{ cm}^2$$

$$100 \text{ cm}^2 \text{ चादर का मूल्य} = 8 \text{ रुपये}$$

$$1 \text{ cm}^2 \text{ चादर का मूल्य} = \frac{8}{100} \text{ रुपये}$$

$$1959.36 \text{ cm}^2 \text{ चादर का मूल्य}$$

$$= \frac{8}{100} \times 1959.36$$

$$= 156.75 \text{ रुपये}$$

प्रश्न-5 20 cm ऊँचाई और शीर्ष कोण 60° वाले एक शंकु को उसकी ऊँचाई के बीचों-बीच से होकर जाते हुए एक तल से दो भागों में काटा गया है, जबकि तल शंकु के आधार के समान्तर है। यदि इस प्राप्त शंकु के चिन्नक को व्यास $\frac{1}{6}$ cm वाले एक तार के रूप में बदल दिया जाता है तो तार की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल:- $\triangle ABC$ में,

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{r_2}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r_2}{10}$$

$$\Rightarrow r_2 = \frac{10}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

$\triangle APQ$ में,

$$\tan \theta = \frac{\text{लम्ब}}{\text{आधार}}$$

$$\Rightarrow \tan 30^\circ = \frac{PQ}{AP}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r_1}{20}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ cm}$$

छिल्लक का आयतन = बेलनाकार तार का आयतन

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \pi (r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2) h = \pi r^2 H$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left[\left(\frac{20}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{10}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{10}{\sqrt{3}} \right) \right] 10 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times H$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{400}{3} + \frac{100}{3} + \frac{200}{3} \right) 10 = \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times H$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3} \left(\frac{400 + 100 + 200}{3} \right) = \frac{1}{32} \times \frac{1}{32} \times H$$

$$\Rightarrow \frac{7000}{9} \times 32 \times 32 = H$$

$$\Rightarrow \boxed{H = 796444.44 \text{ cm}}$$

